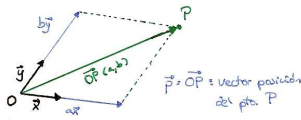


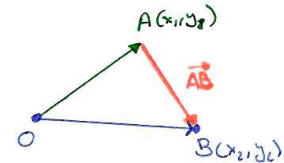
# Geometría Analítica

## Sistema de Referencia

Conjunto formado por un punto fijo denominado origen (O), y una base  $(\vec{x}, \vec{y}) \Rightarrow R = \{O, (\vec{x}, \vec{y})\}$



Dado un punto cualquiera R:  $P(a,b)$ , las coordenadas de dicho punto vendrán según el **vector posición**  $\vec{p} = \vec{OP}$



## Vector a partir de dos puntos

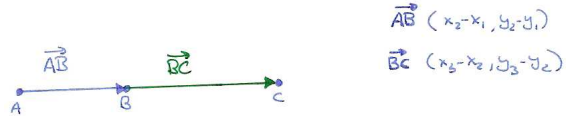
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad \rightarrow \quad A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (\text{igual pero de sentido contrario})$$

## ¿Cómo saber si dos puntos están alineados?

Los puntos  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  y  $C = (x_3, y_3)$  estarán alineados siempre que  $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  y  $\vec{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$  tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales, es decir, si se cumple que:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

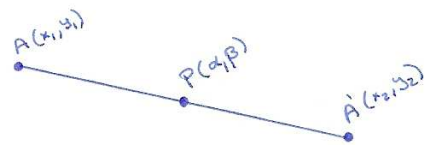


Podemos deducir, aplicando vectores, que si los vectores tienen la misma dirección, el ángulo que forman entre ellos es de 0°, es decir, si realizamos el producto vectorial:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$  ya que  $\cos(\hat{u}, \vec{v}) = 1$

## ¿Cuál es el Punto Medio (M) de un segmento?

Siendo  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$  dos puntos de un segmento, su punto medio será  $M \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

Cabe destacar que M es un punto simétrico a A y B.



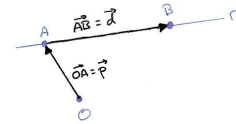
## Punto simétrico de un punto respecto de otro

Si tenemos dos puntos, A y P, podemos hallar el simétrico de A respecto de P, tomando a éste último como punto medio entre A y A', siendo este último el simétrico de A.

$$A = (x_1, y_1) \quad P = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (\alpha, \beta) \quad A' = (x_2, y_2)$$

Los valores desconocidos son los de A', con lo que a partir de sustituir los valores de A en P, tenemos un sistema de tal manera que:  $(x_2, y_2) = (2 \cdot \alpha - x_1, 2 \cdot \beta - y_1)$

## Ecuaciones de las Rectas



### Recta que pasa por dos puntos

Sabiendo dos puntos, A y B, podemos tener tanto un vector de posición  $\vec{p} = \vec{OA}$ , como un vector dirección  $\vec{d} = \vec{AB}$ , y por consiguiente, podemos obtener cualquier ecuación de una recta como veremos en los siguientes apartados.

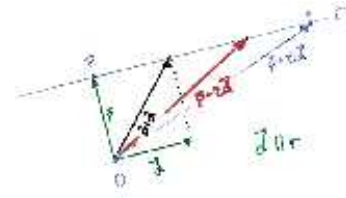
Nota: En caso de no conocer O, podemos tomar  $O=(0,0)$

### Ecuación vectorial de la recta $\vec{OX} = \vec{p} + t \cdot \vec{d}$

O es el origen de coordenadas. X es un punto variable de la recta r.

$\vec{p}$  es el vector posición y  $\vec{d}$  es el vector dirección, que es paralelo a r.  $\vec{d} \parallel r$

t es el parámetro, de tal manera, que al variar t, varía X sobre r



### Ecuación paramétrica de la recta $\begin{cases} x = p_1 + t \cdot d_1 \\ y = p_2 + t \cdot d_2 \end{cases}$

Sabiendo los siguientes datos,  $\vec{OX} = (x, y)$   $\vec{p} = (p_1, p_2)$   $\vec{d} = (d_1, d_2)$ , y sustituyendo los mismos en la ecuación vectorial de la recta, obtendremos el sistema que implica la ecuación pedida. Para cada t obtendremos un punto (x,y).

### Ecuación continua de la recta $\frac{x-p_1}{d_1} = \frac{y-p_2}{d_2} \rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$

Despejando t y realizando el método de igualación obtenemos esta ecuación. Muy conocida de la segunda forma expresada.

### Ecuación General o Implícita de la recta $r : Ax + By + C = 0$

A partir de la ecuación paramétrica, si despejamos t, y realizamos, por ejemplo, el método de igualación  $t=t$ , obtendremos lo siguiente:  $d_2x - d_1y - d_2p_1 + d_1p_2 = 0$ , y llamando  $A = d_2$   $B = -d_1$  y  $C = -d_2p_1 + d_1p_2$ , tenemos dicha ecuación general.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = p_1 + d_1 t \\ y = p_2 + d_2 t \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-p_1}{d_1} = t \\ \frac{y-p_2}{d_2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-p_1}{d_1} = \frac{y-p_2}{d_2} \\ d_2x - d_1y - d_2p_1 + d_1p_2 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-p_1}{d_1} = \frac{y-p_2}{d_2} \\ d_2x - d_1y - d_2p_1 + d_1p_2 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow A = d_2 \quad B = -d_1 \quad C = d_1p_2 - d_2p_1 \\ & \Rightarrow \boxed{Ax + By + C = 0} \end{aligned}$$

Especial atención hay que hacer sobre el punto  $(A, B)$ , ya que sustituyendo por sus valores originales obtenemos  $(d_2, -d_1)$ , o lo que es lo mismo, un **vector dirección perpendicular** a la recta r, es decir,  $(A, B) \perp r$

Recordemos del tema de vectores, que para conseguir un vector perpendicular a uno dado, sólo tenemos que permutar sus componentes y cambiarle el signo a una de ellas.  $(v_1, v_2) \perp (v_2, -v_1)$  o también,  $(v_1, v_2) \perp (-v_2, v_1)$

**Ecuación Explícita de la recta**  $r: y = mx + n$

De la ecuación implícita, si  $B \neq 0$ , si despejamos y obtendremos la siguiente ecuación  $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$ , y haciendo  $m = \frac{-A}{B}$  y  $n = \frac{-C}{B}$ , obtenemos la ecuación explícita de la recta.

$m$  es la pendiente de la recta, mientras que  $n$  es la ordenada en el origen.

**Ecuación Punto Pendiente de la recta**  $y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$

**Ecuación canónica, segmentaria o Forma de los interceptos**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

**Pendiente de una recta**

La pendiente de una recta es el incremento de la ordenada cuando la abscisa aumenta una unidad, de tal manera que

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

también podemos decir que  $m = \frac{-A}{B}$  a partir de una Ecuación General o Implícita de la recta, o que  $m = \frac{-d_2}{(-d_1)} = \frac{d_2}{d_1}$

**Posición de dos rectas según su pendiente**

- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente:  $r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
- Dos rectas son **perpendiculares** si:  $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$  o también  $r_1 \perp r_2 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$

$r_1: y = m_1 x + n_1 \rightarrow m_1 x - y + n_1 = 0 \rightarrow (m_1, -1) \perp r_1$   
 $r_2: y = m_2 x + n_2 \rightarrow m_2 x - y + n_2 = 0 \rightarrow (m_2, -1) \perp r_2$   
 Si son perpendiculares,  $(m_1, -1) \cdot (m_2, -1) = 0 \rightarrow m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$   
 luego  $\underline{m_1 \cdot m_2 = -1}$  c.p.d

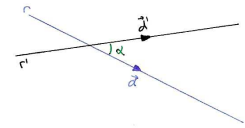
- En general, el **ángulo** formado entre dos rectas será:  $\widehat{r_1, r_2} = \phi \rightarrow \text{tg } \phi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$

$r_1: m_1 = \text{tg } \beta$   
 $r_2: m_2 = \text{tg } \alpha \Rightarrow \phi = \alpha - \beta$  (ángulo entre ambas rectas)  
 $\text{tg } \phi = \left| \text{tg } (\alpha - \beta) \right| = \left| \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \right| = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$

### Ángulo de dos rectas

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$$

**Nota importante:** En el numerador tenemos el valor absoluto del producto escalar de dos vectores, mientras que en el denominador, tenemos el producto del módulo de cada uno de los vectores.



- Si  $\vec{d}=(d_1, d_2)$  es vector director de  $r$ :
- Cualquier recta con vector director  $(k \cdot d_1, k \cdot d_2)$  será paralela o coincidente a  $r$ , siempre que  $k$  no sea cero.
- Cualquier recta con vector director  $(d_2, -d_1)$  o  $(k \cdot d_2, -k \cdot d_1)$  será perpendicular a  $r$ , siempre que  $k$  no sea cero.

### Posición relativa de dos rectas

#### A través de sus Ecuaciones Generales

Sean  $r_1: Ax+By+C=0$  y  $r_2: A'x+B'y+C'=0$  tendremos que el sistema de ecuaciones formado entre ambos tendrá:

- **Solución única** si:  $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ ,
- **Sin solución**, es decir  $r_1 \parallel r_2$ , si  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ ,
- **Infinitas soluciones**, es decir, coincidentes, si  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ ,

#### A través de sus Ecuaciones Paramétricas

Sean  $r_1: \begin{cases} x=a+bt \\ y=c+dt \end{cases}$  y  $r_2: \begin{cases} x=a'+b's \\ y=c'+d's \end{cases}$  tendremos que resolver un sistema de ecuaciones igualando las  $x$  y las  $y$  de ambas rectas, de tal manera que el sistema será  $\begin{cases} a+bt=a'+b's \\ c+dt=c'+d's \end{cases}$  y las incógnitas serán  $t$  y  $s$ . Según el resultado de dicho sistema tendremos lo siguiente:

- Si el sistema tiene una **Solución única**  $(t_0, s_0) \Rightarrow$  Obtendremos  $(x,y)$  sustituyendo  $t_0$  en  $r_1$ , o bien,  $s_0$  en  $r_2$
- Si el sistema **no** tiene una **solución**, las rectas son paralelas, es decir  $r_1 \parallel r_2$
- Si el sistema tiene **Infinitas soluciones**, las rectas son coincidentes, es decir, son la misma.

### Distancias

- Entre dos puntos

$$dist(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Un punto a una recta

$$dist(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde  $P(a, b)$  y  $r: Ax+By+C=0$