EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

1. (ANJ15) Sean los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, 1, m)$.
a) (1 punto) Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.
b) (1 punto) Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.
c) (1 punto) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

2. (CVJ15) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) (1,25 puntos) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$.
b) (0,75 puntos) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π.
c) (1 punto) La distancia del punto P a la recta r, y justificar razonadamente que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

3. (1,25 puntos) Halla la ecuación del plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 2)$ y $C = (1, -1, 0)$.

4. (1,25 puntos) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos de ecuaciones:

$$2x - 2y - z = 9 \quad \text{y} \quad 4x - y + z = 42$$

Indica uno de sus puntos y su vector de dirección.

5. (1,5 puntos) Dados el punto $A = (1, 3, 0)$ y el plano $\pi : x + 2y + z - 1 = 0$, determina las coordenadas del punto A', simétrico del punto A respecto del plano π. ~~Calcula la distancia de A' al plano π.~~

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

Soluciones

1. (ANJ15) Sean los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, 1, m)$.
a) (1 punto) Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.
b) (1 punto) Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.
c) (1 punto) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución:

a) Los puntos A, B, C y D están en el mismo plano cuando los vectores $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ sean linealmente dependientes, lo que implica que el determinante asociado valdrá 0.

$\boldsymbol{AB} = (2, 1, 3) - (0, 1, 1) = (2, 0, 2)$; $\boldsymbol{AC} = (-1, 2, 0) - (0, 1, 1) = (-1, 1, -1)$;
$\boldsymbol{AD} = (2, 1, m) - (0, 1, 1) = (2, 0, m - 1)$

El determinante asociado es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)-4=0 \Rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos dados estarán en el mismo plano cuando $m = 3$.

b) Es el plano mediador: el que pasa por el punto medio de A y B y tiene como vector característico a $\boldsymbol{AB}$.

El punto medio de A y B es: $P\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{1+1}{2}, \dfrac{1+3}{2}\right) \to P(1,1,2)$

Como $\boldsymbol{AB} = (2, 0, 2)$, el plano pedido es:

$$\pi \equiv 2(x-1)+0(y-1)+2(z-2)=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+2z-6=0 \;\Rightarrow\; \pi \equiv x+z-3=0$$

c) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Como $\boldsymbol{AB} = (2, 0, 2)$ y $\boldsymbol{AC} = (-1, 1, -1)$ se tiene que:

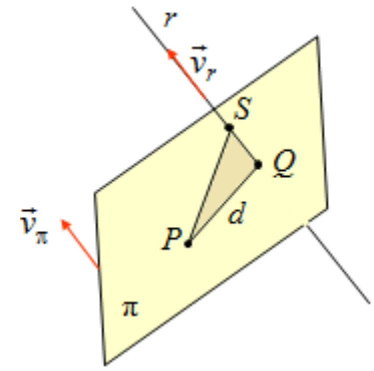
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 0,\ 2) \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

2. (CVJ15) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) (1,25 puntos) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$.
b) (0,75 puntos) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π.
c) (1 punto) La distancia del punto P a la recta r, y justificar razonadamente que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Solución:

a) El vector característico del plano buscado es el de dirección de la recta.



$$r:\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-2y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 1, 0) = \vec{v}_\pi$$

Luego:

$\pi: -2x+y+d=0 \to$ contiene a $P \to -4+d=0 \Rightarrow d=4$

Por tanto:

$\pi: -2x+y+4=0$

b) El punto Q se obtiene resolviendo el sistema recta/plano. Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano se obtiene:

$-2(-2t)+t-4=0 \Rightarrow t=-\dfrac{4}{5} \to$ Luego $Q\left(\dfrac{8}{5}, -\dfrac{4}{5}, 0\right)$.

c) La distancia de P a r es la que hay entre P y $Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+1^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Cualquier otro punto S de r determina con P y Q un triángulo rectángulo, siendo PS la hipotenusa.

Por tanto $d(P, S\in r) \geq \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

3. (1,25 puntos) Halla la ecuación del plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 2)$ y $C = (1, -1, 0)$.

<u>Solución:</u>

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores. El punto puede ser cualquiera de los dados, por ejemplo A; los vectores, $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$. En este caso:

$\boldsymbol{AB} = (2, 2, 2) - (1, 0, 1) = (1, 2, 1)$; $\boldsymbol{AC} = (1, -1, 0) - (1, 0, 1) = (0, -1, -1)$.

Su ecuación será:

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\ \ 2\lambda-\mu \\ z=1+\lambda-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi:\ -(x-1)+y-(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi:\ x-y+z-2=0.$$

4. (1,25 puntos) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos de ecuaciones:

$2x - 2y - z = 9$ y $4x - y + z = 42$

Indica uno de sus puntos y su vector de dirección.

<u>Solución</u>:

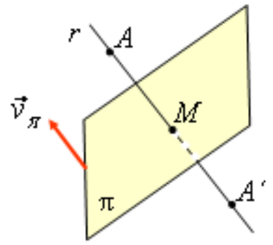
La recta r es, $r:\begin{cases} 2x-2y-z=9 \\ 4x-y+z=42 \end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases} -2y-z=9-2x \\ -y+z=42-4x \end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases} x=\qquad p \\ y=-17+2p \\ z=25-2p \end{cases}$.

Un punto de la recta es $P(0, -17, 25)$. Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (1, 2, -2)$.

5. (1,5 puntos) Dados el punto $A = (1, 3, 0)$ y el plano $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$, determina las coordenadas del punto A', simétrico del punto A respecto del plano π. ~~Calcula la distancia de A' al plano π.~~

Solución:

Sea A' el simétrico de A respecto de π. Ambos puntos, A y A', estarán en la recta r, perpendicular a π por A.



Como $v_\pi = (1, 2, 1)$, se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Puede tomarse A' como un punto genérico de r:

$$A' = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, \lambda)$$

La distancia de ambos puntos al plano debe ser la misma: $d(A, \pi) = d(A', \pi)$.

La distancia de A a π es:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

La distancia de A' a π es:

$$d(A', \pi) = \left| \frac{(1+\lambda) + 2 \cdot (3 + 2\lambda) + \lambda - 1}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{6 + 6\lambda}{\sqrt{6}} \right|.$$

Como ambas distancias deben ser iguales,

$$\left| \frac{6 + 6\lambda}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6} \Rightarrow |6\lambda + 6| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda + 6 = 6 \Rightarrow \lambda = 0 \\ -6\lambda - 6 = 6 \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}.$$

Para $\lambda = 0$, $A' = (1, 3, 0)$, que hay que descartar por tratarse del punto A dado.

Para $\lambda = -2$, $A' = (-1, -1, -2)$, que es el punto buscado.

De otra forma:

Sea $A' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de A respecto de π.

Ambos puntos, A y A' estarán en la recta r, perpendicular a π por A. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre A y A'.

Como $v_\pi = (1, 2, 1)$, se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con el plano $\to$ π: $(1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Por tanto, $M = (0, 1, -1)$.

Punto medio de A y A': $\left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{3 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2} \right)$.

Como $M = (0, 1, -1) = \left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{3 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2} \right) \Rightarrow$

$$0 = \frac{1 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -1;\ 1 = \frac{3 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -1;\ -1 = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -2$$

Por tanto, $A' = (-1, -1, -2)$.