EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

1. (Castilla y León, junio 16).

Se consideran las rectas $r \equiv \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z-1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.

a) (1 punto). Comprueba que las rectas r y s se cruzan.

b) (2 puntos). Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s.

2. (Castilla La Mancha, junio 16).

Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

a) (1,5 puntos). Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$.

b) (1 punto). Calcula el punto simétrico de Q respecto a r.

3. (Canarias, junio 16).

Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$, se pide

a) (1 punto). Demuestra que se encuentran en un mismo plano.

b) (1 punto). Halla la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

4. (Madrid, junio 2012).

Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto) Halla los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

b) (1 punto) Halla la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

5. (Aragón, junio 16)

a) (0,5 puntos). Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$

b) (0,5 puntos) Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

Soluciones:

1. (Castilla y León, junio 16).

Se consideran las rectas $r \equiv \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z-1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.

a) (1 punto). Comprueba que las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) (2 puntos). Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas *r* y *s*.

<u>Solución</u>:

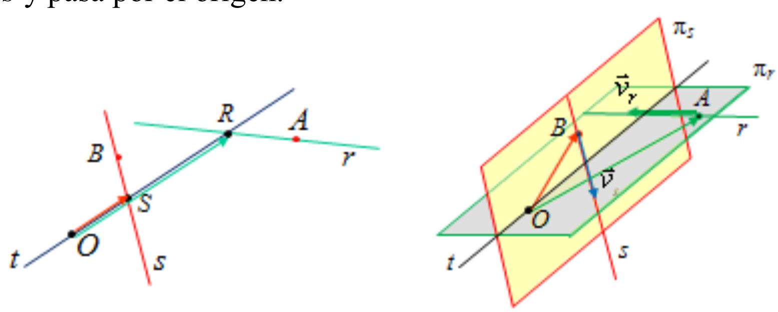
a) Hay que comprobar que los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{AB}$ son linealmente independientes.

$\vec{v}_r = (2, 1, 2)$, $\vec{v}_s = (2, 3, 1)$ y $\boldsymbol{AB} = (0, 1, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, -1)$,

donde $A = (0, 0, 1)$ es un punto de *r* y $B = (0, 1, 0)$ un punto de *s*.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 6 = -2 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) La recta pedida se obtiene por intersección de los planos π_r, que contiene a *r* y pasa por el origen, y π_s, que contiene a *s* y pasa por el origen.



Plano π_r:

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\boldsymbol{OA} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v}_r = (2, 1, 2)$; el punto $A(0, 0, 1)$ pertenece a la recta *r*.

Su ecuación es:

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r : x - 2y = 0$$

Plano π_s:

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\boldsymbol{OB} = (0, 1, 0)$ y $\vec{v}_s = (2, 3, 1)$; el punto $B(0, 1, 0)$ pertenece a la recta *s*.

Su ecuación es:

$$\pi_s: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 3 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s : -x + 2z = 0$$

Por tanto, $t : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$. En paramétricas: $t : \begin{cases} y = x/2 \\ z = x/2 \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

De otra forma: la recta buscada pasa por un punto de $S \in s$ y otro punto $P \in r$ alineados con O. Esto es, de manera que los vectores $\boldsymbol{OS}$ y $\boldsymbol{OR}$ tengan la misma dirección.

El vector $\boldsymbol{OR} = (2\mu, \mu, 1+2\mu)$, mientras que $\boldsymbol{OS} = (2h, 1+3h, h)$.

Como sus coordenadas deben ser proporcionales: $\dfrac{2\mu}{2h} = \dfrac{\mu}{1+3h} = \dfrac{1+2\mu}{h}$.

De $\dfrac{2\mu}{2h} = \dfrac{\mu}{1+3h} \Rightarrow h = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{OS} = (-1, -1/2, -1/2)$;

de $\dfrac{2\mu}{2h} = \dfrac{1+2\mu}{h} \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \boldsymbol{OR} = (-2, -1, -1) \equiv (2, 1, 1)$.

Luego, la recta pedida es $t: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

2. (Castilla La Mancha, junio 16).
Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$.
a) (1,5 puntos). Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$.
b) (1 punto). Calcula el punto simétrico de Q respecto a r.
Solución:
a) El punto pedido es el de corte de la recta r con del plano perpendicular a r por el punto Q.

La recta es: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$.

Como $\vec{v} = (1, -1, 0)$, el plano perpendicular a r por el punto Q es:

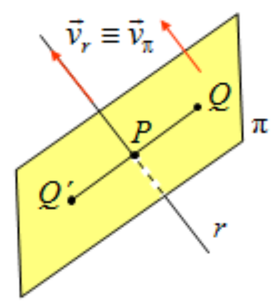
$\pi \equiv x - y + d = 0 \to$ por contener a Q: $\pi \equiv 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$.

Luego: $\pi \equiv x - y = 0$

Corte de r con π: se sustituyen las ecuaciones de $r \equiv (1+t,\ -t,\ 1)$ en π, obteniéndose

$\pi \equiv 1 + t + t = 0 \Rightarrow t = -1/2$

Para $t = -1/2$ se obtiene $P = (1/2, 1/2, 1)$.



b) Sea $Q' = (x_0, y_0, z_0)$ es punto simétrico de Q respecto de π.

Punto medio de Q y Q': $\left(\dfrac{x_0}{2}, \dfrac{y_0}{2}, \dfrac{1+z_0}{2}\right)$.

Como $P(1/2, 1/2, 1) = \left(\dfrac{x_0}{2}, \dfrac{y_0}{2}, \dfrac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 1$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 1$; $1 = \dfrac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 1$

Por tanto, $Q' = (1, 1, 1)$.

3. (Canarias, junio 16).

Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$, se pide

a) (1 punto). Demuestra que se encuentran en un mismo plano.
b) (1 punto). Halla la ecuación general del plano que determinan.
Solución:

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_{r1} = (1, -1, 2)$, $\vec{v}_{r2} = (4, -2, 3)$ y $\mathbf{AB} = (-5, 3, -4) - (1, 1, -2) = (-6, 2, -2)$

donde A es un punto de r y B un punto de s.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 10 - 8 = 0$, los vectores son linealmente dependientes. En consecuencia, están en el mismo plano. (Como no son paralelas, se cortarán).

b) El plano pedido viene determinado por los vectores $\vec{v}_{r1}$ y $\vec{v}_{r2}$ y por cualquier punto de alguna de las rectas; por ejemplo $A(1, 1, -2)$.

Su ecuación será:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y-1 & -1 & -2 \\ z+2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x - 1 + 5(y-1) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow \pi : x + 5y + 2z - 2 = 0.$$

4. (Madrid, junio 2012).

Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto) Halla los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

b) (1 punto) Halla la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

a) (1 punto) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores $\mathbf{P_1P_2}$, $\mathbf{P_1P_3}$ y $\mathbf{P_1P_4}$, que son:

$\mathbf{P_1P_2} = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a - 1, -1, 1)$; $\mathbf{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5)$

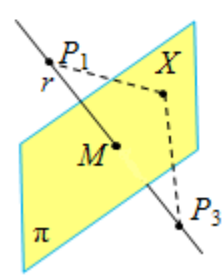
$\mathbf{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3)$.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|21a - 21 - 7| = \frac{1}{6}|21a - 28| = 7$$

Dos soluciones:

$$\frac{1}{6}(21a - 28) = 7 \Rightarrow a = \frac{70}{21} = \frac{10}{3}; \text{ o bien, } \frac{1}{6}(-21a + 28) = 7 \Rightarrow a = -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$$

b) (1 punto) Se trata del plano mediador: pasa por el punto medio del segmento P_1P_3 y es perpendicular al vector $\mathbf{P_1P_3}$.



Como $\mathbf{P_1P_3} =$ (0, 2, 5) y el punto $M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = (1, 4, 3/2)$, el plano pedido será:

$\pi : 2y + 5z + d = 0 \to 8 + 15/2 + d = 0 \Rightarrow d = -31/2 \Rightarrow$

$\pi : 4y + 10z - 31 = 0$

De otra forma:

Si $X = (x, y, z)$ es un punto genérico de ese plano, como $d(X, P_1) = d(X, P_3)$, debe cumplirse que:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2} \to \pi : 4y + 10z - 31 = 0.$$

5. (Aragón, junio 16)

a) (0,5 puntos). Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}|=|\vec{s}|=2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})$

b) (0,5 puntos) Si el producto escalar del vector $\vec{u}+\vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u}-\vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

Solución:

La expresión del producto escalar de los vectores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ es: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

a) Como $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})=\vec{w}\cdot\vec{w}-\vec{w}\cdot\vec{s} \Rightarrow \vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})=4-4\cos 60º=4-4\cdot\frac{1}{2}=2$.

b) Si $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=25 \Rightarrow |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=25$;

si $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=9 \Rightarrow |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=9$.

Restando ambas expresiones: $4|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=16 \Rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=4$.