1) Expresar en radianes los siguientes ángulos: 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º, 15º, 1º, 17,53º, 152º16', 572º, 1000º.

Soluciones: $0\ rad,\ \frac{\pi}{6} rad,\ \frac{\pi}{4} rad,\ \frac{\pi}{3} rad,\ \frac{\pi}{2} rad,\ \frac{2\pi}{3} rad,\ \frac{3\pi}{4} rad,\ \frac{5\pi}{6} rad,\ \pi\, rad,\ \frac{7\pi}{6} rad,\ \frac{5\pi}{4} rad,\ \frac{4\pi}{3} rad,\ \frac{3\pi}{2} rad,\ \frac{5\pi}{3} rad,\ \frac{7\pi}{4} rad,\ \frac{11\pi}{6} rad,\ \frac{\pi}{12} rad,\ \frac{\pi}{180} rad,\ \frac{1753\pi}{18000} rad,\ 2{,}6576\ rad,\ \frac{143\pi}{45} rad,\ \frac{50\pi}{9} rad.$

2) Expresar en grados, minutos y segundos los siguientes ángulos, dados en radianes: $\frac{15\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{4}$, 0,625 rad, 10 rad

Soluciones: 337º40', 405º, 112º30', 1800º.

3) a) Expresar en grados y en radianes el ángulo que forman las manecillas de un reloj a las 5 en punto. b) Ídem a las 12:20.

Soluciones: a) 150º; b) 110º

4) ¿Qué ángulo entre 0º y 360º señala sobre la circunferencia el mismo punto que los siguientes ángulos?: a) 455º; b) 1200º; c) –175º; d) –715º; e) 500 π rad

Soluciones: a) 95º; b) 120º; c) 185º; d) 5º; e) 0º ≡ 0 rad

5) En una circunferencia, a un arco de 2m le corresponde un ángulo central de 40º. Calcular el radio.

Solución: $\frac{9}{\pi} m$

6) En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 30º y su cateto opuesto, 12 cm. Calcular el otro ángulo, la hipotenusa y el cateto restante.

Solución: 60º, h = 24 cm, c = $12\sqrt{3}$ *cm*

7) Un ángulo de un triángulo rectángulo mide $\frac{\pi}{3}$ rad, y su cateto adyacente, 28cm. Calcular los restantes elementos del triángulo.

Solución: 30º, h = 56 cm, c= $28\sqrt{3}$ *cm*

8) Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 38º y la hipotenusa, 30 cm. Hallar los restantes elementos.

Solución: 52º, 18,47 cm y 23,64 cm

9) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 14 cm y uno de sus catetos, 11 cm. Calcular el otro cateto y los ángulos del triángulo.

Solución: $\sqrt{75}$ *, 51º47'12,44" y 38º12'47,56"*

10) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 9 cm respectivamente. Calcular la hipotenusa, los ángulos y el área del triángulo.

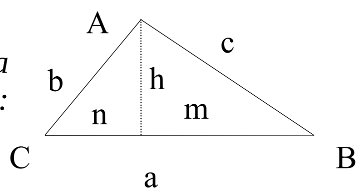
Solución: h=11,4 cm, 37º52'29,94" y 52º7'30,06", A=63/2cm^2

11) En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa es igual a 8 cm. ¿Cuánto miden los catetos?

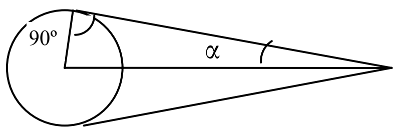
Solución: $4\sqrt{2}$ *cm*

12) En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm respectivamente, calcular la hipotenusa, la altura relativa a la hipotenusa y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

Solución: a=5, n=9/5, m=16/5, h=2,4. Recordar el teorema del cateto: $b^2=a\cdot n$, $c^2=a\cdot m$, *y el teorema de la altura:* $h^2=m\cdot n$.



13) Desde un punto situado a 25m del pie de una torre se ve ésta bajo un ángulo de 60º. ¿Cuánto mide la torre? *Solución:* $25\sqrt{3}\,m$
14) Hallar el área de un hexágono regular de 20 cm de lado. *Solución:* $600\sqrt{3}\,cm^2$
15) Hallar el área de un octógono regular de 50 mm de lado. *Solución: 12.071,07* mm^2
16) Calcular el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 m tiene como arco correspondiente uno de 70º. *Solución: 21,44m*
17) La base de un triángulo isósceles mide 10 m y el ángulo opuesto 50º. Calcular el área. *Solución: 53,61* m^2
18) El ángulo de elevación de la cúspide de una torre es de 45º15' a una distancia de 72 m de la torre. Si el punto de observación se encuentra a 1,10 m del suelo, calcular la altura de la torre. *Solución: 73,73 m.*
19) Una moneda de 25 ptas mide 2,5 cm de diámetro. Hallar el ángulo que forman las tangentes a dicha moneda desde un punto situado a 6 cm del centro . *Solución:* 2α*=24º2'57,83"*



20) Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de 20º9'48". Siendo el radio de la Tierra de 6.366 km, calcular la distancia de la nave a la superficie terrestre. *Solución: 30.000 km.*
21) Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60º. Suponiendo que el hilo esté tirante, calcular la altura de la cometa. *Solución:* $50\sqrt{3}\,m$
22) Los tres cables que sujetan una torre de una emisora de radio tienen sus anclajes en una circunferencia de 100 m de radio y forman un triángulo equilátero. Cada cable forma con la horizontal un ángulo de 45º. ¿Cuál es la altura de la torre? *Solución: 100 m.*
23) Si las dos ramas de un compás forman un ángulo de 60º y cada rama tiene 12 cm de longitud, hallar el radio de la circunferencia que puede trazarse. *Solución: 12 cm.*
24) Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo mide 60º. Hallar la altura de la torre.

    Solución: $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ *m (típico problema del llamado método de doble observación)*
25) Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? *Solución: 24º14'14"*
26) Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 45º, y si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30º. Hallar la altura del árbol y el ancho del río. *Solución: ambos, 54,64 m.*
27) Un hombre está situado al oeste de la antena de una emisora de radio. Observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. ¿Cuál es la altura de la antena? *Solución: 35,36 m.*
28) Se desea calcular la altura de una torre. Para ello se hacen dos observaciones desde los puntos A y B, situados en una misma recta con el pie de la torre, obteniéndose como ángulos de elevación 30º y 45º respectivamente. La distancia AB = 30 m. Calcular la altura de la torre. *Solución: 40,98 m.*
29) Pedro y Ana ven desde las puertas de sus casas una colina bajo ángulos de 45º y 60º respectivamente. La distancia entre sus casas es de 126 m, y la colina se encuentra en la recta que las une. Calcular la altura de la colina. *Solución: 298,12 m.*

30) Dibujar los ángulos menores cuyas razones trigonométricas son: a) sen $\alpha = 3/5$; b) cos $\alpha = 4/5$; c) tg $\alpha = 1$; d) cotg $\alpha = 1$; e) sec $\alpha = 1$; f) cosec $\alpha = 2$.

31) Calcular las restantes razones trigonométricas, sabiendo que: a) sen $\alpha = 3/5$, $\alpha \in$ I cuad.; b) cos $\alpha = 4/5$, $270º \le \alpha \le 360º$; c) sen $\alpha = 3/5$, $90º \le \alpha \le 180º$; d) tg $\alpha = 3/4$, $180º \le \alpha \le 270º$; e) cotg $\alpha = -2$, $90º \le \alpha \le 180º$; f) sec $\alpha = 1$, $270º \le \alpha \le 360º$; g) cosec $\alpha = -2$, $180º \le \alpha \le 270º$; h) tg $\alpha = 3/4$, $0º \le \alpha \le 90º$; i) cos $\alpha = 1{,}3$, $\alpha \in$ IV cuad; j) tg $\alpha = 2$, $90º \le \alpha \le 180º$.

Soluciones:

a) sen α = 3/5, cos α = 4/5, tg α = 3/4, cotg α = 4/3, sec α = 5/4, cosec α = 5/3

b) sen α = -3/5, cos α = 4/5, tg α = -3/4, cotg α = -4/3, sec α = 5/4, cosec α = -5/3

c) sen α = 3/5, cos α = -4/5, tg α = -3/4, cotg α = -4/3, sec α = -5/4, cosec α = 5/3

d) sen α = -3/5, cos α = -4/5, tg α = 3/4, cotg α = 4/3, sec α = -5/4, cosec α = -5/3

e) sen α= $\sqrt{5}/5$, cos α=-2$\sqrt{5}/5$, tg α=-1/2, cotg α=-2, sec α = -$\sqrt{5}/2$, cosec α= $\sqrt{5}$

f) sen α = 0, cos α = 1, tg α = 0, cotg α no tiene, sec α = 1, cosec α = no tiene

g) sen α=-1/2, cos $\alpha = -\sqrt{3}/2$, tg $\alpha = \sqrt{3}/3$, cotg $\alpha = \sqrt{3}$, sec $\alpha = -2\sqrt{3}/3$, cosec α=-2

h) sen α = 3/5, cos α = 4/5, tg α = 3/4, cotg α = 4/3, sec α = 5/4, cosec α = 5/3

i) cos α no puede ser mayor que 1 ni menor que -1; tg α es negativa en el 2º cuad.

32) Expresar las siguientes razones trigonométricas en función de un ángulo del primer cuadrante: a) sen(–120º); b) cotg(–150º); c)sen 2700º; d) sec(–25º); e) cos(–30º); f) cosec 4420º; g) tg(–275º); h) cotg 4500º.

Soluciones: a) -sen 60º= $-\sqrt{3}/2$; b) cotg 30º= $\sqrt{3}$; c) sen 0º=0; d) sec 25º; e) cos 30º= $\sqrt{3}/2$; f) cosec 80º; g) tg 85º; h) cotg 0º, que no existe.

33) Siendo α un ángulo del tercer cuadrante tal que tg $\alpha = 3/4$, calcular: a) tg(-α); b) tg(180º+α); c) tg(720º+α); d) tg(90º-α); e) tg(270º-α); f) tg(90º+α); g) tg(270º+α); h) tg(180º-α)

Soluciones: a) -tg α = -3/4; b) tg α = 3/4; c) tg α = 3/4; d)cotg α = 4/3 (tener en cuenta que 90–α=–(α–90)); e)cotg α = 4/3; f) -cotg α = -4/3; g) -cotg α = -4/3; h) -tg α = -3/4

34) Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \cos\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = 1$

c) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

d) $\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\,\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} = |\cos\alpha|$

e) $\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

f) $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 1$

g) $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = sen^2\alpha - \cos^2\alpha$ (este resultado es igual a –cos 2α)

h) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha} = 1$

i) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = -1$

j) $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$

k) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$

l) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

m) $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$

n) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \cos\alpha$

ñ) $\dfrac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$

35) Simplficar: $\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{sen}^3\alpha$ *Sol:* $(\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)^3$

36) a) ¿Puede ocurrir que sen $\alpha = 1/2$ y cos $\alpha = 1/3$ para el mismo ángulo α? b) ¿Y que tg $\alpha = 2\sqrt{2}$ y cos $\alpha = 1/3$?

Solución: a) No, porque no se cumple que $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$*; b) Si, puesto que* $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

37) Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades, para cualesquiera valores de los ángulos que en ellas aparecen tales que existan las expresiones:

a) $\sec^2\alpha + \mathrm{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\alpha$; b) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha = \sec\alpha \cdot \mathrm{cosec}\alpha$;

c) $\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\beta = \mathrm{sen}^2\beta - \cos^2\alpha$; d) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$;

e) $\mathrm{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \mathrm{cotg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; f) $\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\alpha\sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha = 1$;

g) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{cotg}\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\alpha}$; i) $\dfrac{1 - \mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$; j) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1 + \sec\alpha} - \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1 - \sec\alpha} = \dfrac{2}{\mathrm{sen}\,\alpha}$;

k) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha} = 2\,\mathrm{tg}\alpha$; l) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)}{1 - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$;

m) $\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \mathrm{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$; n) $\dfrac{\mathrm{cosec}\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{cotg}\alpha} - \dfrac{\mathrm{cotg}\alpha}{\mathrm{cosec}\alpha} = 0$;

ñ) $\dfrac{\sec^4\alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \sec^2\alpha + 1$; o) $\dfrac{2\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = 3\cos\alpha$;

p) $\dfrac{\sec\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{\sec\alpha + 1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$; q) $(\sec\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha)(\mathrm{cosec}\alpha + 1) = \mathrm{cotg}\alpha$;

r) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \mathrm{sen}\,\alpha} - \dfrac{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 0$; s) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta} = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$;

t) $\dfrac{\sec\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} - \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{cotg}\,\alpha$

38) Si sen 30º = ½, calcular: a) sen 150º; b) sen 210º; c) sen 330º; d) cos 60º; e) cos 120º; f) cos 240º; g) cos 300º; h) cosec 210º; i) sec 300º; j) sen(–225º); k) sen 855º.

39) Calcular los valores de:

a) arctg $\sqrt{3}$ b) arcsec 2 c) arccos(-2) d) arctg(-1)

Soluciones: a) $\pi/3$*; b)* $\pi/3$*; c) No existe; d)* $-\pi/4$

40) Calcular: a) sen(arcsen $\sqrt{2}/2$) b) sen(arccos $\sqrt{3}/2$) c) tg(arcsec 2)

Soluciones: a) $\sqrt{2}/2$; b) 1/2; c) $\sqrt{3}$

41) Determinar los períodos principales de las siguientes funciones:

a) y = sen 2x b) y = tg $\dfrac{4}{3}x$ c) y = tg $\dfrac{5}{6}x$ d) y = cos $\dfrac{1}{2}x$ e) y = sen $\dfrac{4}{3}x$

f) y = cos(2x+1) *Soluciones: a)* π*; b)* $\dfrac{3\pi}{4}$*; c)* $\dfrac{6\pi}{5}$*; d)* 4π*; e)* $\dfrac{3\pi}{2}$*; f)* π

42) Representar las siguientes funciones:

a) y = 2sen x b) y = $\dfrac{1}{2}$sen x c) y = sen 2x d) y = sen(2x+1) e) y = cos $\dfrac{x}{2}$

43) Calcular sin utilizar la calculadora: sen 105º, cos 75º, tg 15º y sen 120º.

Soluciones: sen 105º = sen(60º+45º)= $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *; cos75º=cos(30º+45º)=* $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *;*

tg 15º=tg(60º-45º)= $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ *, también tg 15º=tg* $\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ *;*

sen 120º=sen 2·60º= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *, también sen 120º=sen(180º-120º)=sen 60º=* $\frac{\sqrt{3}}{2}$

44) Utilizando que cos 36º=0,8090, calcular sen 9º y cos 6º.

Soluciones: calculando previamente sen 36º= $\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}$ *=0,5878* $\Rightarrow$

sen 9º=sen(45º-36º)=0,1564; cos 6º=cos(36º-30º)=0,9945

45) Demostrar que sen 3a=sen a(3cos^{2}a–sen^{2}a) *Indicación: 3a=2a+a*

46) Expresar sen 3a en función de sen a. *Solución: sen 3a=3sen a–4sen^{3}a*

47) Si a, b y c son los tres ángulos de un triángulo, demostrar que:
tg a+tg b+tg c=tg a·tg b·tg c
Solución: tener encuentra que a+b+c=180º y despejar, de esa expresión, a, tomando tangentes en la igualdad resultante.

48) Demostrar que se a+b+c=$\frac{\pi}{2}$, entonces: tg a·tg b+tg b·tg c+tg c·tg a=1

Solución: similar al anterior.

49) Siendo a, b y c los ángulos de un triángulo, demostrar que: $\frac{\cos(a-b)-\cos c}{2\cos a}=\cos b$

Solución: Desarrollar el primer miembro, convirtiendo el numerador en producto y teniendo, después, en cuenta que a+b+c=180º.

50) Simplificar: $\frac{\operatorname{sen} 2a}{1-\cos a}\bullet\frac{1+\cos a}{\cos a}$ *Solución:* $\frac{2(1+\cos a)^2}{\operatorname{sen} a}$

51) Demostrar que las siguientes igualdades son ciertas siempre:
a) sen a·sen(b–c)+sen b·sen(c–a)+sen c·sen(a–b)=0
b) tg a–tg b=tg a tg b(cotg b–cotg a) c) tg($\frac{\pi}{4}$+a)–tg($\frac{\pi}{4}$–a)=2tg 2a
d) $\frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{tg} 2a}=\cos a-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos a}$ e) $\frac{\operatorname{sen} 5a+\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 3a-\operatorname{sen} a}=1+2\cos 2a$
f) $\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b}\bullet\frac{\cos a-\cos b}{\cos a+\cos b}=-\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{2}$

Solución: a)Desarrollar usando las fórmulas de diferencia de ángulos; b) Poner cotangentes en función de tangentes; c) Desarrollar las tangentes del primer miembro de la igualdad; d) Desarrollar tg 2a y poner las tangentes resultantes en función de senos y cosenos; e) Transformar sumas en productos; f) Transformar todas las sumas en productos.

52) Hallar los valores de *x* que resuelven las siguientes ecuaciones:
a) $\operatorname{sen} x\bullet\cos x=\frac{1}{2}$ b) $\cos x\bullet\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$ c) sen 2*x*=cos *x*
e) cos 2π+5cos *x*+3=0 f) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $2\cos^2 x+\cos x=1$
h) cos 2*x*–cos 6*x*=sen 5*x*+sen 3*x* i) cos 2*x*+3sen *x*=2 j) tg *x*=5sen *x*
k) sen *x*+tg *x*=3cos *x*sen *x* l) 2 sen^2 *x* + 3 cos *x* = 3

Soluciones: a) x=45º+180ºk con k∈Z, pasando el 2 del 2º miembro al 1º; b) x=30º+360ºk, x=150º+360ºk, convirtiendo la tangente en seno y coseno; c) x=90º+180ºk, x=30º+360ºk, x=150º+360ºk, desarrollando sen 2x; e) x=143º7'48"+360ºk, x=216º52'11"+360ºk; f) $\sqrt{3}/2$ *es el valor del seno de π/3 y de 2π/3, igualar, pues, los argumentos de los senos salvo vueltas completas (2kπ, con k∈Z), y se obtiene: x=π/24+kπ, x=5π/24+kπ; g) Resolviendo la ec. de 2º grado en cos x, x=180º+360ºk, x=60º+360ºk, x=300º+360ºk; h) Transformar los dos miembros en productos: x=45ºk, x=90º+180ºk, x=30º+360ºk, x=150º+360ºk; i) x=30º+360ºk, x=150º+360ºk, x=90º+360ºk, resolviendo la ecuación de 2º grado en* sen x *que queda; j) x=180ºk, x=±78º27'46,95"+360ºk; k) Transformar tangente en seno y coseno; pasar todo a un miembro y sacar factor común* sen x*; resolver las dos ecuaciones resultantes por separado, la segunda de ella es de segundo grado en* cos x*; resulta: x=180ºk, x=±39º51'+360ºk, x=±115º4'+360ºk; l) (Resolver ec. de 2º grado en cos x) x=0º+360ºk, x=60º+360ºk, x=300º+360ºk*

53) Resolver los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{4}\\ \cos^2 x-\operatorname{sen}^2 y=\frac{1}{4}\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}\cos(x+y)=\frac{1}{2}\\ \operatorname{sen}(x-y)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=\frac{3}{2}\\ \cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=\frac{1}{4}\\ \cos x\cos y=\frac{3}{4}\end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x+\cos y=\sqrt{2}\\ x-y=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x+\cos y=\frac{1}{2}\\ \operatorname{cosec}y+\sec y=-1\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l}y\operatorname{sen}x=\sqrt{3}\\ y\cos x=1\end{array}\right\}$

Soluciones: a) Poner los cosenos en función de senos, y resolver el sistema resultante en sen x *y* sen y *, obteniéndose 16 conjuntos de soluciones, que son cada uno de los valores de x siguientes en combinación con cada uno de los valores de y siguientes:*

$\left.\begin{array}{l}x=30^o+360^o k\\ x=150^o+360^o k\\ x=210^o+360^o k\\ x=330^o+360^o k\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}y=45^o+360^o k\\ y=135^o+360^o k\\ y=225^o+360^o k\\ y=315^o+360^o k\end{array}\right\}$*, con k,k'∈Z; b) Se resuelven ambas ecuaciones por separado, resultando 4 sistemas en* x *e* y *(el primero de ellos, por ejemplo, es:* $\left.\begin{array}{l}x+y=60^o+360^o k\\ x-y=30^o+360^o k'\end{array}\right\}$*), que, resolviéndolos y teniendo en cuenta que K=k+k'∈Z, y que K'=k-k'∈Z, dan las soluciones siguientes:* $\left.\begin{array}{l}x=45^o+180^o K\\ y=15^o+180^o K'\end{array}\right\}$,

$\left.\begin{array}{l}x=105^o+180^o K\\ y=135^o+180^o K'\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=165^o+180^o K\\ y=135^o+180^o K'\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=225^o+180^o K\\ y=75^o+180^o K'\end{array}\right\}$*; c) Transformando la 1º ecuación en productos y utilizando la 2º, queda una ecuación simple en* $\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}$, *que puede resolverse directamente, al igual que la segunda ecuación original; con ello, resultan 4 sistemas de ecuaciones en* x *e* y*, el primero de los cuales, por ejem-*

plo, es $\left.\begin{array}{l} x+y=120^\circ+720^\circ k \\ x-y=60^\circ+720^\circ k' \end{array}\right\}$ *que al resolverlos teniendo en cuenta que K=k+k' ∈Z, y que K'=k-k' ∈Z, dan las soluciones siguientes:* $\left.\begin{array}{l} x=90^\circ+360^\circ K \\ y=30^\circ+360^\circ K' \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=210^\circ+360^\circ K \\ y=180^\circ+360^\circ K' \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=150^\circ+360^\circ K \\ y=90^\circ+360^\circ K' \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=270^\circ+360^\circ K \\ y=150^\circ+360^\circ K' \end{array}\right\}$; *d) Transformando ambas ecuaciones en sumas, resulta un sistema en* cos(x+y) *y en* cos(x–y), *que, al resolverlo, da lugar a 2 sistemas en* x+y *y* x–y, *cuyas soluciones son:* $\left.\begin{array}{l} x=30^\circ+180^\circ K \\ y=30^\circ+180^\circ K' \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=150^\circ+180^\circ K \\ y=150^\circ+180^\circ K' \end{array}\right\}$; *e) Despejando* x *en la 2ª y sustituyendo en la 1ª, desarrollando, después, sen(y+π/2), resultan:* $\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ y=\frac{7\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ y=\frac{\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right\}$;

f) Hacer el cambio de variable a=sen x, b=cos y, *tras poner la segunda ecuación en función de* sen x *y* cos y*; tras resolver el sistema en* a *y* b *y deshacer el cambio:*
$\left.\begin{array}{c} x=90^\circ+360^\circ k \\ y=120^\circ+360^\circ k' \quad o \quad y=240^\circ+360^\circ k' \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{c} x=210^\circ+360^\circ k \quad o \quad x=330^\circ+360^\circ k \\ y=0^\circ+360^\circ k' \end{array}\right\}$;

g) Dividiendo las dos ecuaciones puede conocerse x, *y elevándolas al cuadrado y sumándolas, se obtiene* y: $\left.\begin{array}{l} x=60^\circ+180^\circ k \\ y=\pm 2 \end{array}\right\}$

54) En un triángulo se conocen los lados b=3 m y c=4 m, y el ángulo comprendido A=60º. Hallar el lado a. *Sol: a=* $\sqrt{13}$ *m (Dos lados y ángulo comprendido⇒ T .coseno)*

55) Un lado de un triángulo es *a* y su ángulo opuesto vale 30º. Calcular *a* sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo mide 3.
Solución: a=3, aplicando la interpretación geométrica del Teorema del seno.

56) Los lados de un triángulo son *a*= $\sqrt{2}$, *b*=1 y *c*=1. Hallar el ángulo *A*.
Solución: 90º (Tres lados⇒ T .coseno)

57) En un triángulo se conoce un lado *a*=6 m y los ángulos *B*=45º y *C*=105º. Calcular los restantes elementos.
Solución: A=30º, b= $6\sqrt{2}$ *m, c≈11,6 m (Dos ángulos y un lado⇒ T .seno)*

58) Un solar tiene forma triangular. Se han podido determinar dos lados, que miden 10 y 7 dam respectivamente, y el ángulo comprendido se ha medido con un teodolito, resultando ser igual a 30º. Calcular el resto de los elementos del triángulo.
Sol: Llamando a=10, b=7, C=30º, resulta c=5,27, B=41º37'52,36" y A= 108º22'7,64". Con T. del Seno aparecen dos soluciones falsamente válidas (construir un gráfico). Con 2 lados y el ángulo comprendido hay solución única siempre.

59) En una plaza hay una fuente. Desde un punto del pueblo se divisan dicha fuente y un castillo, siendo el ángulo entre las visuales respectivas de 40º32'. Si la distancia del mencionado punto a la fuente es de 42 dam, y de la fuente al castillo, 32 dam, ¿cuál es la distancia en línea recta del punto en cuestión al castillo, teniendo en cuenta que el ángulo que forman desde el castillo las visuales al punto de medición y a la fuente es agudo? *Solución: 48,62 dm*

60) Una parcela tiene forma triangular, siendo sus dimensiones de 15, 22 y 17 m. Calcular los ángulos. *Solución: 42º54', 86º38', 50º28'*

61) Se desea medir la altura de un montículo. Desde un punto, su ángulo de elevación es 30º. Avanzando 100 m en línea recta hacia la base, el ángulo de elevación se transforma en 45º. ¿Cuál es su altura?

Solución: 136,4 m Puede hacerse por el método de doble observación, como el problema 24 y similares; pero puede también aplicarse el T. del seno

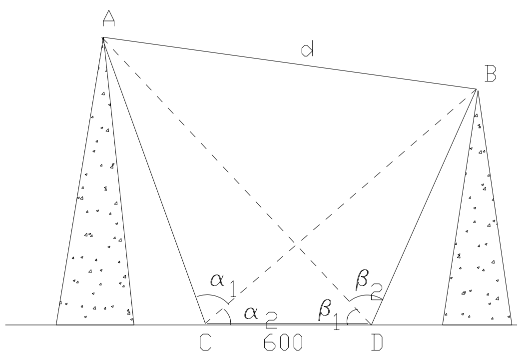
62) Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior de árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17º. Aproximándose 25,9 m hacia la base del árbol, el ángulo cambia a 31º. Calcular la altura del árbol. *Solución: 16,05 m*

63) Dos individuos A y B observan un globo que está situado en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los individuos es de 4 km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 46º y 52º respectivamente. Hallar la altura del globo y su distancia a cada observador.

Solución: Suponiendo que ambos observadores están al mismo lado de la vertical del globo, h=21,69 km, BC=27,52 km, AC=30,15 km. Suponiendo que el globo está entre ambos, h=2,29 km, AC=3,18 km, BC=2,91 km. Tratándose de un globo, parece más lógica la segunda posibilidad.

64) Dos puntos A y B se encuentran situados en las distintas orillas de un río. En la misma orilla que A, se sitúa un tercer punto C, distante 100 m de A. Desde A, las visuales a B y a C forman un ángulo de 120º. Desde C, las visuales a los otros dos puntos forman 30º. Calcular la distancia entre A y B. *Solución: 100 m*

65) Dos montañeros, que han ascendido en fines de semana sucesivos a dos picos, querrían saber qué distancia hay entre las cimas de ambos. Para ello, desde un punto C y D han medido los ángulos α_1=85º y α_2=30º. Después se han dirigido hacia la base de la otra montaña, hasta el punto D, situado a 600 m del C, y han medido los ángulos β_1=40º y β_2=93º. ¿Cuál es la distancia d entre las cimas?



Solución: Medir AD en ACD y BD en BCD, utilizando el Teorema del Seno. Usar el T. del Coseno para calcular d en ABD. Resulta 1687 m.

66) Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? *Solución: 13,08 km*

67) Sea AB una altura de pie accesible, situada en terreno horizontal. Desde el punto E, situado a 23,41 m de la base A, con un aparato situado en C a un metro de altura del suelo, se dirige una visual a B, resultando un ángulo de 4º12’ con la horizontal. ¿Cuánto mide la altura AB? *Solución: 2,72 m*

68) Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados por la longitud 73,2 m. Suponiendo que los ángulos ACD=80º12’, BCD=43º31’, BDC=32º y ADC=23º14’, determinar la distancia AB.

Solución: Similar al 61, pero el dibujo es algo diferente por cuanto la distancia AB es inferior a CD: 24,06 m

69) De un triángulo conocemos dos de sus lados a=4 y b=10 y el ángulo opuesto a uno de ellos A=20º. Calcular el resto de los elementos del triángulo.

Solución: Dos lados y un ángulo no comprendido ⇒ T. seno. Pero si sabemos el valor de sen B, hay dos posibilidades para B, entre 0 y 180º. Hay que ver si ambas son válidas teniendo en cuenta que los ángulos no sumen más de 180º. En este caso, hay dos soluciones válidas: B=121º14'4,93", C=38º45'55,07", c=7,32 y B=58º45'55,07", C=101º14'4,93", c=11,47.

70) Resolver un triángulo conociendo que *a*=12, *b*=5 y *A*=120º.

Sol: B=21º9'7,319", C=38º50'52,7", c=8,69. No es válida B=15º50'53" porque B+A>180º (el ángulo A=120º es dato del problema). Siempre que nos den un ángulo obtuso, la segunda solución aportada por el T. del seno no es válida, porque un triángulo sólo puede tener un ángulo obtuso)

71) Resolver un triángulo sabiendo que *a*=1, *b*=4 y *A*=35º *Sol: No tiene*

72) Resolver un triángulo sabiendo que *a*=2, *b*=4 y *A*=30º *Sol: B=90º (rectángulo), C=60º, c=3,46*

73) Resolver un triángulo del que conocemos *a*=5, *c*= 5, *C*=40º

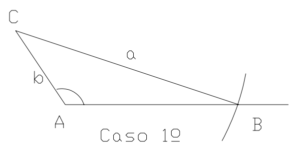
Sol: A=40º, B=100º, b=7,66 (es isósceles). No es válida A=140º porque A+C=180º, con lo que el tercer ángulo valdría 0º y no habría triángulo.

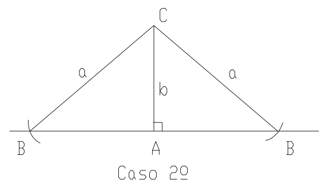
74) Resolver un triángulo del que sabemos que *a*=9, *b*=8 y *A*=30º

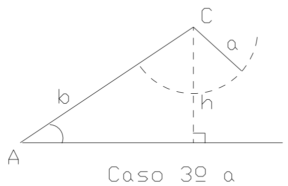
Sol: B=26º23'16,1", C=123º36'44", c=14,99. No es válido B=153º36'44" porque B+A=B+30º>180º

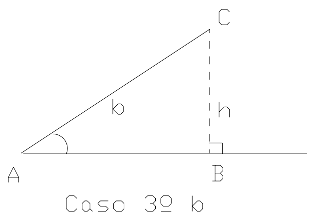
Si bien no es necesario para resolver triángulos, a continuación damos todos los casos que pueden presentarse al construir un triángulo, conocidos dos lados a y b y el ángulo opuesto a uno de ellos, A. Los problemas 69) al 74) contienen ejemplos de cada caso (salvo del caso 2º). El 69) es el 3ºc; el resto de los problemas son cada uno de los casos restantes, en su orden.

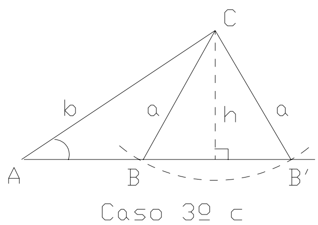
Todos los casos posibles dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: *a, b* y *A*

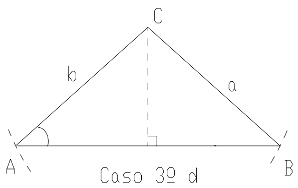
<table>
<tr>
<td colspan="3">

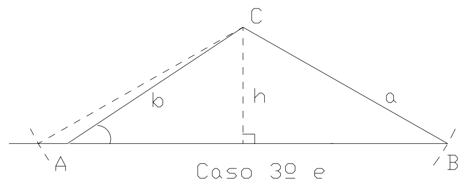
A obtuso: solución única</td>
<td colspan="3">

A=90º: solución única
En este problema nos darían *a*, *b* y *B*</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

A<90º y *a* < *b* sen *A* = *h*
No hay solución</td>
<td colspan="2">

A<90º y *a* = *b* sen *A* = *h*
Solución única: triángulo rectángulo</td>
<td colspan="2">

A<90º y *b*>*a* >*b* sen *A*
Dos soluciones</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

A<90º y *a*=*b*
Solución única</td>
<td colspan="3">

A<90º y *a*>*b*
Dos soluciones, pero sólo una es válida</td>
</tr>
</table>