Página 75

PRACTICA

Operaciones con polinomios

1 **Efectúa las operaciones y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $x(x^2 + 1) - 3x(-x + 3) + 2(x^2 - x)^2$

b) $2(x^2 + 3) - 2x(x - 3) + 6(x^2 - x - 1)$

c) $-4x(x - 4)^2 + 3(x^2 - 2x + 3) - 2x(-x^2 + 5)$

a) $x(x^2 + 1) - 3x(-x + 3) + 2(x^2 - x)^2 =$

$= x^3 + x + 3x^2 - 9x + 2(x^4 - 2x^3 + x^2) =$

$= x^3 + x + 3x^2 - 9x + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x$

b) $2(x^2 + 3) - 2x(x - 3) + 6(x^2 - x - 1) =$

$= 2x^2 + 6 - 2x^2 + 6x + 6x^2 - 6x - 6 = 6x^2$

c) $-4x(x - 4)^2 + 3(x^2 - 2x + 3) - 2x(-x^2 + 5) =$

$= -4x(x^2 - 8x + 16) + 3x^2 - 6x + 9 + 2x^3 - 10x =$

$= -4x^3 + 32x^2 - 64x + 3x^2 - 6x + 9 + 2x^3 - 10x = -2x^3 + 35x^2 - 80x + 9$

2 **Multiplica y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $-3x(x + 7)^2 + (2x - 1)(-3x + 2)$

b) $(2a^2 + a - 1)(a - 3) - (2a - 1)(2a + 1)$

c) $(3b - 1)(3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2(2b^2 + 16b - 16)$

a) $-3x(x + 7)^2 + (2x - 1)(-3x + 2) =$

$= -3x(x^2 + 14x + 49) - 6x^2 + 4x + 3x - 2 =$

$= -3x^3 - 42x^2 - 147x - 6x^2 + 7x - 2 = -3x^3 - 48x^2 - 140x - 2$

b) $(2a^2 + a - 1)(a - 3) - (2a - 1)(2a + 1) =$

$= 2a^3 + a^2 - a - 6a^2 - 3a + 3 - 4a^2 + 1 = 2a^3 - 9a^2 - 4a + 4$

c) $(3b - 1)(3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2(2b^2 + 16b - 16) =$

$= 9b^2 - 1 - (16b^2 - 24b + 9) - 4b^2 - 32b + 32 =$

$= 9b^2 - 1 - 16b^2 + 24b - 9 - 4b^2 - 32b + 32 = -11b^2 - 8b + 22$

3 **Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $25x^2 + 40x + 16$ **b)** $64x^2 - 160x + 100$ **c)** $4x^2 - 25$

a) $25x^2 + 40x + 16 = (5x + 4)^2$

b) $64x^2 - 160x + 100 = (8x - 10)^2$

c) $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$

4 **Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $x^4 + 4x^2 + 4$ **b)** $x^4 - 16$ **c)** $9x^2 - 6x^3 + x^4$ **d)** $2x^2 + 4x + 2$

a) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$

b) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

c) $9x^2 - 6x^3 + x^4 = x^2(x - 3)^2$

d) $2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$

5 **Saca factor común e identifica productos notables en cada caso:**

a) $12x^3 - 3x$ **b)** $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$ **c)** $45x^2 - 120x + 80$ **d)** $3x^3 - 15x$

a) $12x^3 - 3x = 3x(4x^2 - 1) = 3x(2x - 1)(2x + 1)$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

c) $45x^2 - 120x + 80 = 5(9x^2 - 24x + 16) = 5(3x - 4)^2$

d) $3x^3 - 15x = 3x(x^2 - 5) = 3x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

6 **Halla el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (x^2 - x + 1)$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 - 2) : (x^2 + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & -7x & +5 & x^2 - x + 1 \\ \cline{4-4} -3x^2 & +3x & -3 & 3 \\ \hline & -4x & +2 & \end{array}$$

Cociente: 3

Resto: $-4x + 2$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$

Observamos que $x^3 - x = x(x^2 - 1)$, luego $(x^3 - x) : (x^2 - 1) = x$

Cociente: x

Resto: 0

c)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -3x^2 & & -2 & x^2 + 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & -x & & x - 3 \\ \hline & -3x^2 & -x & & \\ & 3x^2 & & +3 & \\ \hline & & -x & +3 & \end{array}$$

Cociente: $x - 3$

Resto: $-x + 3$

7 Calcula el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$ **b)** $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 7x^3 - 5x + 1 & x^3 + 2x \\ \cline{2-2} \underline{-x^5 - 2x^3 \qquad\qquad} & x^2 + 5 \\ \quad 5x^3 & \\ \quad \underline{-5x^3 - 10x} & \\ \qquad -15x + 1 & \end{array}$$

Cociente: $x^2 + 5$

Resto: $-15x + 1$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 5x^2 + x & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 \qquad + x} & x - 5 \\ \quad -5x^2 + 2x & \\ \quad \underline{5x^2 \qquad - 5} & \\ \qquad 2x - 5 & \end{array}$$

Cociente: $x - 5$

Resto: $2x - 5$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 5x^2 + x & 2x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 \qquad + (1/2)x} & (1/2)x - 5/2 \\ \quad -5x^2 + (3/2)x & \\ \quad \underline{5x^2 \qquad\quad - 5/2} & \\ \qquad (3/2)x - 5/2 & \end{array}$$

Cociente: $(1/2)x - 5/2$

Resto: $(3/2)x - 5/2$

8 Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(6a^3 + 5a^2 - 9a) : (3a - 2)$ **b)** $(3b^4 - 8b^3 + 9b^2 - 2b - 7) : (b^2 - b - 1)$

c) $(4c^5 - 2c^3 + 3c) : (c^2 - c + 2)$

a)

$$\begin{array}{l|l} 6a^3 + 5a^2 - 9a & 3a - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-6a^3 + 4a^2} & 2a^2 + 3a - 1 \\ \quad 9a^2 & \\ \quad \underline{-9a^2 + 6a} & \\ \qquad -3a & \\ \qquad \underline{3a - 2} & \\ \qquad\quad -2 & \end{array}$$

Cociente: $2a^2 + 3a - 1$

Resto: -2

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3b^4 & -8b^3 & +9b^2 & -2b & -7 & b^2-b-1 \\
\cline{6-6}
-3b^4 & +3b^3 & +3b^2 & & & 3b^2-5b+7 \\
\cline{1-3}
 & -5b^3 & +12b^2 & & & \\
 & 5b^3 & -5b^2 & -5b & & \\
\cline{2-4}
 & & 7b^2 & -7b & & \\
 & & -7b^2 & +7b & +7 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Cociente: $3b^2 - 5b + 7$

Resto: 0

c)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4c^5 & & -2c^3 & & +3c & & c^2-c+2 \\
\cline{7-7}
-4c^5 & +4c^4 & -8c^3 & & & & 4c^3+4c^2-6c-7 \\
\cline{1-3}
 & 4c^4 & -10c^3 & & & & \\
 & -4c^4 & +4c^3 & -8c^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & -6c^3 & -8c^2 & & & \\
 & & 6c^3 & -6c^2 & +12c & & \\
\cline{3-5}
 & & & -14c^2 & +15c & & \\
 & & & 14c^2 & -7c & +14 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 8c & +14 &
\end{array}$$

Cociente: $4c^3 + 4c^2 - 6c - 7$

Resto: $8c + 14$

Regla de Ruffini. Teorema del resto

9 **Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$ **b)** $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

c) $(3x^3 + 5x^2 - x) : (x + 2)$ **d)** $(x^3 - 27) : (x - 3)$

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$ **f)** $(x^5 - 2x^4 + x - 2) : (x - 1)$

a) $(2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$

	2	–1	5	–3
2		4	6	22
	2	3	11	19

Cociente: $2x^2 + 3x + 11$

Resto: 19

b) $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

	–1	0	3	–2	1
–1		1	–1	–2	4
	–1	1	2	–4	5

Cociente: $-x^3 + x^2 + 2x - 4$

Resto: 5

c) $(3x^3 + 5x^2 - x) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & & -6 & 2 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 1 & \underline{\lfloor -2} \end{array}$$

Cociente: $3x^2 - x + 1$
Resto: -2

d) $(x^3 - 27) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & \underline{\lfloor 0} \end{array}$$

Cociente: $x^2 + 3x + 9$
Resto: 0

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 & \underline{\lfloor 0} \end{array}$$

Cociente: $x^3 - x^2$
Resto: 0

f) $(x^5 - 2x^4 + x - 2) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & \underline{\lfloor -2} \end{array}$$

Cociente: $x^4 - x^3 - x^2 - x$
Resto: -2

10 Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3 y –3 son raíces de los polinomios siguientes:

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

Descomponemos en factores cada uno de los polinomios:

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -2 & & -2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \underline{\lfloor 0} \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & \underline{\lfloor 0} & \end{array}$$

$P(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 1)$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & -4 & 24 \\ 2 & & 2 & -8 & -24 \\ \hline & 1 & -4 & -12 & \underline{\lfloor 0} \\ -2 & & -2 & 12 & \\ \hline & 1 & -6 & \underline{\lfloor 0} & \end{array}$$

$Q(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 6)$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = x(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -11 & 12 \\
1 & & 1 & -1 & -12 \\
\hline
 & 1 & -1 & -12 & 0 \\
-3 & & -3 & 12 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 0 &
\end{array}$$

$R(x) = x(x - 1)(x + 3)(x - 4)$

$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6 = 2(x^3 - x^2 - 5x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -5 & -3 \\
-1 & & -1 & 2 & 3 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0 \\
-1 & & -1 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -3 & 0 &
\end{array}$$

$S(x) = 2(x + 1)^2(x - 3)$

Así, 1 es raíz de $R(x)$; -1 es raíz de $P(x)$ y de $S(x)$; 2 es raíz de $Q(x)$; -2 es raíz de $P(x)$ y de $Q(x)$; 3 es raíz de $P(x)$ y de $S(x)$; -3 es raíz de $R(x)$.

11 **Aplica la regla de Ruffini para calcular el valor del polinomio:**

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$$

para $x = 2$, $x = -1$ y $x = -2$.

El valor de $P(x)$ cuando hacemos $x = a$ coincidirá con el resto de la división $P(x) : (x - a)$, según el teorema del resto.

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & 5 & -8 \\
2 & & 4 & -6 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -1 & -10
\end{array} \quad \rightarrow \quad P(2) = -10$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & 5 & -8 \\
-1 & & -2 & 9 & -14 \\
\hline
 & 2 & -9 & 14 & -22
\end{array} \quad \rightarrow \quad P(-1) = -22$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & 5 & -8 \\
-2 & & -4 & 22 & -54 \\
\hline
 & 2 & -11 & 27 & -62
\end{array} \quad \rightarrow \quad P(-2) = -62$$

12 Comprueba si los siguientes polinomios son divisibles por $x - 2$ y/o por $x + 1$:

a) $x^3 + 3x^2 - 10x$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

d) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2$

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Para que un polinomio, $P(x)$, sea divisible por $x - 2$, el resto de la división de $P(x) : (x - 2)$ ha de ser 0, es decir, $P(2) = 0$. Análogamente, para que sea divisible por $x + 1$, debe ser $P(-1) = 0$.

a) $x^3 + 3x^2 - 10x$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -10 & 0 \\ 2 & & 2 & 10 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -10 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & -12 & \lfloor 12 \end{array}$$

$x^3 + 3x^2 - 10x$ es divisible por $x - 2$, pero no por $x + 1$.

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \lfloor 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - x - 2$ es divisible por $x + 1$, pero no por $x - 2$.

c) $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ 2 & & 4 & -2 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \lfloor 0 \\ -1 & & -2 & 3 & \\ \hline & 2 & -3 & \lfloor 0 & \end{array}$$

$2x^3 - 5x^2 - x + 6$ es divisible por $x + 1$ y por $x - 2$.

d) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(-x^2 + 3x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -2 \\ 2 & & -2 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & \lfloor 0 \end{array}$$

$-x^4 + 3x^3 - 2x^2$ es divisible por $x - 2$, pero no por $x + 1$.

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & 6 & \boxed{16} & \end{array}$$

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ es divisible por $x + 1$, pero no por $x - 2$.

Página 76

Factorización de polinomios

13 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

14 **Factoriza los siguientes polinomios:**

a) $x^2 - 6x - 7$

b) $x^2 + 12x + 35$

c) $4x^2 + 8x - 12$

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x$

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2$

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

☛ *En c) d) e) y f), saca factor común.*

a) $x^2 - 6x - 7$

Buscamos las raíces de $x^2 - 6x - 7$:

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$.

b) $x^2 + 12x + 35$

$$x^2 + 12x + 35 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} = \frac{-12 \pm 2}{2} = \begin{cases} -7 \\ -5 \end{cases}$$

Así: $x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$

c) $4x^2 + 8x - 12 = 4(x^2 + 2x - 3)$

Buscamos las raíces de $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, $4x^2 + 8x - 12 = 4(x + 3)(x - 1)$.

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x^2 + x - 12)$

Buscamos las raíces de $x^2 + x - 12$:

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Luego, $2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x - 3)(x + 4)$.

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x^2 + 9x - 10)$

$$x^2 + 9x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-9 \pm 11}{2} = \begin{cases} 1 \\ -10 \end{cases}$$

Así, $x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x - 1)(x + 10)$.

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x^2 - 3x - 10)$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Luego, $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x + 2)(x - 5)$.

15 **Saca factor común y utiliza los productos notables para descomponer en factores los siguientes polinomios. Di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $x^3 - x$ **c)** $4x^4 - 81x^2$

d) $x^3 + 2x^2 + x$ **e)** $12x^3 - 27x$ **f)** $3x^2 + 30x + 75$

a) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$

Las raíces son: $x = 0$, $x = 3$ (raíz doble)

b) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

Las raíces son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

c) $4x^4 - 81x^2 = x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x - 9)(2x + 9)$

Las raíces son: $x = 0$ (raíz doble), $x = \frac{9}{2}$, $x = -\frac{9}{2}$

d) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

Las raíces son: $x = 0$, $x = -1$ (raíz doble)

e) $12x^3 - 27x = 3x(4x^2 - 9) = 3x(2x - 3)(2x + 3)$

Las raíces son: $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$

f) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$

La raíz es: $x = -5$ (raíz doble)

16 **Descompón en factores y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^4 - x^2$ **b)** $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ **c)** $2x^3 - 3x^2$

d) $x^3 - x^2 - 12x$ **e)** $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ **f)** $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

a) $x^4 - x^2 = 0$

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \ \ \text{(raíz doble)} \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 4 & 12 \\ -3 & & -3 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(x^2 + 4) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -3 \ \text{es su raíz}$$

c) $2x^3 - 3x^2 = 0$

$$x^2(2x - 3) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \ \ \text{(raíz doble)} \\ x = 3/2 \end{cases}$$

d) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

$$x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12) = x(x - 4)(x + 3) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 2 & & 2 & -10 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 2)(x - 1)(x - 4) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

17 **Factoriza los polinomios siguientes:**

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $4x^2 + 17x + 15$

c) $2x^2 - 9x - 5$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $3x^2 + 2x - 8$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} =$$

$$= \frac{-2 \pm 10}{2} = \begin{cases} -2 \\ \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Luego, $3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \dfrac{4}{3}\right) \cdot (x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$.

b) $4x^2 + 17x + 15$

$$4x^2 + 17x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{8} =$$

$$= \frac{-17 \pm 7}{8} = \begin{cases} -3 \\ \dfrac{-10}{8} = \dfrac{-5}{4} \end{cases}$$

Luego, $4x^2 + 17x + 15 = 4(x + 3)\left(x + \dfrac{5}{4}\right) = (x + 3)(4x + 5)$.

c) $2x^2 - 9x - 5$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} =$$

$$= \frac{9 \pm 11}{4} = \begin{cases} 5 \\ \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $2x^2 - 9x - 5 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 5) = (2x + 1)(x - 5)$.

d) $-x^2 + 17x - 72$

$$-x^2 + 17x - 72 = 0 \rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 288}}{-2} = \frac{-17 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 9 \\ 8 \end{cases}$$

Así, $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 9)(x - 8) = (9 - x)(x - 8)$

18 **Descompón en factores:**

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$ **b)** $x^3 - x - 6$ **c)** $3x^4 + 15x^2$ **d)** $x^4 - 1$

a)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 4x - 4 & x - 1 \\ x^2 + 4 & x^2 + 4 \\ 1 & \end{array} \qquad x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+4)$$

b)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - x - 6 & x - 2 \\ x^2 + 2x + 3 & x^2 + 2x + 3 \\ 1 & \end{array} \qquad x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2+2x+3)$$

c)
$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 15x^2 & 3x^2 \\ x^2 + 5 & x^2 + 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 3x^4 + 15x^2 = 3x^2(x^2+5)$$

d) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Fracciones algebraicas

19 **Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:**

a) $\dfrac{x-3}{2x-6}$ y $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ y $\dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$ **d)** $\dfrac{3x-2}{9x^2-4}$ y $\dfrac{1}{3x+2}$

a) $\dfrac{x-3}{2x-6}$ y $\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{x-3}{2x-6} = \dfrac{x-3}{2(x-3)} = \dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$ Las fracciones son equivalentes.

b) $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ y $\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{x^2}{x^2+x} = \dfrac{x^2}{x(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}$ $\rightarrow$ No son equivalentes.

c) $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$

$$\dfrac{x}{x^2-x} = \dfrac{x}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$$

$$\dfrac{2}{2x-2} = \dfrac{2}{2(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$$

Ambas fracciones son equivalentes.

d) $\dfrac{3x-2}{9x^2-4}$ y $\dfrac{1}{3x+2}$

$\dfrac{3x-2}{9x^2-4} = \dfrac{3x-2}{(3x+2)(3x-2)} = \dfrac{1}{3x+2}$ → Ambas fracciones son equivalentes.

20 Calcula:

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}$

b) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}$

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$

d) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{6}{6x} - \dfrac{3}{6x} - \dfrac{2}{6x} = \dfrac{1}{6x}$

b) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2}{2x^2} - \dfrac{2x}{2x^2} + \dfrac{x}{2x^2} = \dfrac{2-x}{2x^2}$

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x(x-1)} - \dfrac{x}{x(x-1)} = \dfrac{-1}{x(x-1)}$

d) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{4}{(x-2)(x+2)}$

21 Saca factor común y luego simplifica:

a) $\dfrac{15x+15}{10x+10}$

b) $\dfrac{x+3}{2x+6}$

c) $\dfrac{x^2-x}{x^2}$

a) $\dfrac{15x+15}{10x+10} = \dfrac{15(x+1)}{10(x+1)} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{x+3}{2x+6} = \dfrac{x+3}{2(x+3)} = \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{x^2-x}{x^2} = \dfrac{x(x-1)}{x^2} = \dfrac{x-1}{x}$

22 Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$

c) $\dfrac{9x^2-4}{3x-2}$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

e) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x}$

f) $\dfrac{x(x+1)}{x^2+2x+1}$

g) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

h) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$

b) $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $\dfrac{9x^2-4}{3x-2} = \dfrac{(3x+2)(3x-2)}{3x-2} = 3x+2$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3}$

e) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{(x-5)^2} = \dfrac{x+5}{x-5}$

f) $\dfrac{x(x+1)}{x^2+2x+1} = \dfrac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{x+1}$

g) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x+2}$

h) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2+1}$

23 **a) Simplifica las fracciones:** $A = \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ $\quad B = \dfrac{x^2-3x}{2x}$

b) Calcula $A - B$ después de simplificar.

a) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{1}{x+3}$

$\dfrac{x^2-3x}{2x} = \dfrac{x(x-3)}{2x} = \dfrac{x-3}{2}$

b) $A - B = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2}{2(x+3)} - \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x+3)} =$

$= \dfrac{2-x^2+9}{2(x+3)} = \dfrac{11-x^2}{2(x+3)}$

24 **Efectúa:**

a) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{x} + 1$

b) $\dfrac{x-2}{3} \cdot \dfrac{x+2}{3}$

c) $\dfrac{1}{x-1} : \dfrac{x+1}{x}$

d) $\dfrac{x+2}{3x^2} - \dfrac{1}{6x}$

a) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{x} + 1 = \dfrac{x^2}{3x} - \dfrac{6}{3x} + \dfrac{3x}{3x} = \dfrac{x^2+3x-6}{3x}$

b) $\frac{x-2}{3} \cdot \frac{x+2}{3} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{9} = \frac{x^2-4}{9}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1}$

d) $\frac{x+2}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{2(x+2)}{6x^2} - \frac{x}{6x^2} = \frac{2x+4-x}{6x^2} = \frac{x+4}{6x^2}$

25 **Efectúa:**

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x}$ **b)** $\frac{3}{x^2} - \frac{x+2}{5x}$ **c)** $\frac{x-2}{x+3} - \frac{2}{3x}$ **d)** $\frac{5}{x^2} - \frac{3x-1}{x+1}$

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+3x-3}{x^2-x}$

b) $\frac{3}{x^2} - \frac{x+2}{5x} = \frac{15}{5x^2} - \frac{x(x+2)}{5x^2} = \frac{15-x^2-2x}{5x^2}$

c) $\frac{x-2}{x+3} - \frac{2}{3x} = \frac{3x(x-2)}{3x(x+3)} - \frac{2(x+3)}{3x(x+3)} = \frac{3x^2-6x-2x-6}{3x(x+3)} = \frac{3x^2-8x-6}{3x^2+9x}$

d) $\frac{5}{x^2} - \frac{3x-1}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x^2(x+1)} - \frac{(3x-1)x^2}{x^2(x+1)} = \frac{5x+5-3x^3+x^2}{x^2(x+1)} =$

$= \frac{-3x^3+x^2+5x+5}{x^3+x^2}$

Página 77

PIENSA Y RESUELVE

26 **Di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:**

a) $P(x) = (x+5)^2\,(2x-3)\,x$ **b)** $R(x) = 3x(x^2+5)$

c) $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$ **d)** $S(x) = 2x^2(x-7)$

a) $P(x) = (x+5)^2(2x-3)x$

$x = -5$ (raíz doble), $x = \frac{3}{2}$, $x = 0$

b) $R(x) = 3x(x^2+5)$

$x = 0$

c) $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$

$x = 2$

d) $S(x) = 2x^2(x-7)$

$x = 0$ (raíz doble), $x = 7$

27 **Descompón en factores el dividendo y el divisor, y después simplifica:**

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$ b) $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + x^2}$ c) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$ d) $\dfrac{x^2 - x + 48}{x^2 - 8x + 7}$

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x}{x-3}$

b) $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + x^2} \rightarrow$ No se puede simplificar, ya que el numerador no se puede descomponer en factores de menor grado.

c) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6} = \dfrac{x(x-2)(x-1)}{3(x-2)(x-1)} = \dfrac{x}{3}$

d) $\dfrac{x^2 - x + 48}{x^2 - 8x + 7} \rightarrow$ No se puede simplificar, ya que el numerador no se puede descomponer en factores de menor grado.

28 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

29 **Opera y simplifica:**

a) $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right)$ b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}$ c) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$

d) $\dfrac{2}{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x-1}\right)$ e) $\left(\dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x-4}\right) \cdot 2x^2$

a) $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{9 - x^2}{3x} : \dfrac{3 + x}{3x} = \dfrac{9 - x^2}{3 + x} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 3 - x$

b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2 \cdot x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left(\dfrac{x^2+1}{x} : \dfrac{x^2-1}{x}\right) \cdot (x-1) =$

$= \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \cdot (x-1) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

d) $\dfrac{2}{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2(x-1)}{x^2}$

e) $\left(\dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x-4}\right) \cdot 2x^2 = \dfrac{(x-1)(x-4) + 3(x-4)x - 5x^2}{x^2(x-4)} \cdot 2x^2 =$

$= \dfrac{x^2 - 5x + 4 + 3x^2 - 12x - 5x^2}{(x-4)} \cdot 2 =$

$= \dfrac{2(-x^2 - 17x + 4)}{(x-4)}$

30 **Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:**

a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{\ldots}{x + 1}$ **b)** $\dfrac{x}{2x + 1} = \dfrac{x^2}{\ldots}$

c) $\dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{\ldots}{x^2 - 9}$ **d)** $\dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{\ldots}{x^2 + 4x + 4}$

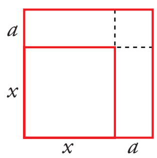
a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{x}{x + 1}$

b) $\dfrac{x}{2x + 1} = \dfrac{x^2}{2x^2 + x}$

c) $\dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{x(x + 3)}{x^2 - 9} = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$

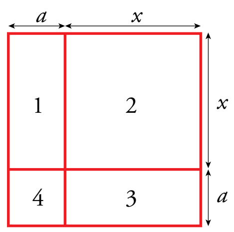
d) $\dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{2(x + 2)}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4}$

31 **El lado x de un cuadrado aumenta en a cm y formamos un nuevo cuadrado.**



Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado $x + a$.

Área del cuadrado de lado $(x + a) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = A$



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a \cdot x \\ A_2 = x^2 \\ A_3 = a \cdot x \\ A_4 = a^2 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \\ = ax + x^2 + ax + a^2 = 2ax + a^2 + x^2 = A \end{array}$$

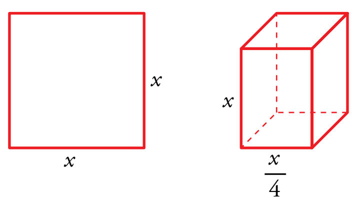
32 **Con un cuadrado de lado x formamos un prisma de base cuadrada, pero sin bases.**

a) Escribe el área total del prisma en función de x.

b) Escribe su volumen en función de x.

a) $A_p = 4 \cdot x \cdot \dfrac{x}{4} = x^2$

b) $V_p = x \cdot \dfrac{x}{4} \cdot \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^3}{16}$



33 **Traduce a lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:**

a) El cociente entre un número y su siguiente.

b) El cociente entre dos números pares consecutivos.

c) Un número menos su inverso.

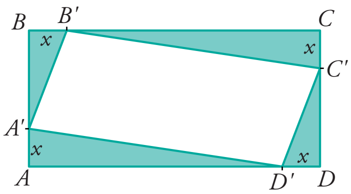
d) El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.

e) La suma de los inversos de dos números consecutivos.

a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{2x}{2x+2}$ c) $x-\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}$ e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$

34 **En el rectángulo $ABCD$ hemos señalado los puntos A', B', C', D', de modo que: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$**

Expresa el área del cuadrilátero $A'B'C'D'$ mediante un polinomio en x, sabiendo que $\overline{AB} = 3$ cm y $\overline{BC} = 5$ cm.



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

El área del triángulo $B'CC'$ es $\frac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $A'AD'$ es $\frac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $B'BA'$ es $\frac{x(3-x)}{2}$.

El área del triángulo $D'DC'$ es $\frac{x(3-x)}{2}$.

El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

$$A_{\text{paralelogramo}} = 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2}\right] =$$

$$= 15 - [x(5-x) + x(3-x)] = 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15$$

35 **Comprueba que al reducir la expresión $\frac{m+1}{2m} + \frac{m+4}{4m} - \frac{2m+9}{6m}$ obtienes una fracción numérica.**

$$\frac{m+1}{2m} + \frac{m+4}{4m} - \frac{2m+9}{6m} = \frac{6(m+1)}{12m} + \frac{3(m+4)}{12m} - \frac{2(2m+9)}{12m} =$$

$$= \frac{6m+6+3m+12-4m-18}{12m} = \frac{5m}{12m} = \frac{5}{12}$$

Página 78

36 **Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:**

a) x^2 ; $x^2 - x$; $x^2 - 1$

b) $x - 3$; $x^2 - 9$; $x^2 - 6x + 9$

c) $x + 2$; $3x + 6$; $x^2 + x - 2$

d) $2x$; $2x + 1$; $4x^2 - 1$

a) $$\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1$

m.c.m. $[x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x-1)(x+1)$

b) $$\left.\begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x - 3$

m.c.m. $[x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x-3)^2(x+3)$

c) $$\left.\begin{array}{l} x + 2 \\ 3x + 6 = 3(x+2) \\ x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = x + 2$

m.c.m. $[x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = 3(x+2)(x-1)$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x \\ 2x + 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1) \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 1$

m.c.m. $[2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 2x(4x^2 - 1)$

37 **Efectúa:**

a) $\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x^2 - 9} + \dfrac{2}{x^2 - 6x + 9}$

c) $\dfrac{2x}{x^2 + x - 2} - \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{x-4}{3x+6}$

d) $\dfrac{x+2}{2x+1} - \dfrac{2}{4x^2 - 1} + \dfrac{x+1}{2x}$

En todos los apartados, el mínimo común múltiplo de los denominadores ha sido calculado en el ejercicio anterior.

a) $\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1} =$

$= \dfrac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \dfrac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \dfrac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{(x-2)(x^2-1)+(x+2)(x^2+x)-x^2}{x^2(x^2-1)} =$

$= \dfrac{x^3-2x^2-x+2+x^3+2x^2+x^2+2x-x^2}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{2x^3+x+2}{x^4-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x^2-9} + \dfrac{2}{x^2-6x+9} =$

$= \dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} - \dfrac{2(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} =$

$= \dfrac{x(x^2-\ 9)-(x+1)(x-3)-2(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} = \dfrac{x^3-9x-x^2+2x+3-2x-6}{(x-3)^2(x+3)} =$

$= \dfrac{x^3-x^2-9x-3}{(x-3)^2(x+3)}$

c) $\dfrac{2x}{x^2+x-2} - \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{x-4}{3x+6} =$

$= \dfrac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \dfrac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \dfrac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} =$

$= \dfrac{6x-15x+15-x^2+5x-4}{3(x+2)(x-1)} = \dfrac{-x^2-4x+11}{3(x+2)(x-1)}$

d) $\dfrac{x+2}{2x+1} - \dfrac{2}{4x^2-1} + \dfrac{x+1}{2x} =$

$= \dfrac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \dfrac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \dfrac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} =$

$= \dfrac{(2x^2+4x)(2x-1)-4x+(x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} =$

$= \dfrac{4x^3+8x^2-2x^2-4x-4x+4x^3+4x^2-x-1}{2x(4x^2-1)} = \dfrac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(4x^2-1)}$

38 Opera y simplifica:

a) $\left(1-\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{x^2}{x+3}-1$ b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right):\dfrac{3}{x^2}$ c) $4-\dfrac{1}{2x-1}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

a) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\left(\frac{x-x+1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{x^2}{x(x+3)}-1=$

$$=\frac{x^2-x(x+3)}{x(x+3)}=\frac{x^2-x^2-3x}{x(x+3)}=\frac{-3x}{x(x+3)}=\frac{-3x}{x+3}$$

b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{x^2}{x(x+3)}=\frac{x}{x+3}$

c) $4-\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=4-\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2}=4-\frac{1}{x^2}=\frac{4x^2-1}{x^2}$

39 Efectúa:

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}$

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}+\frac{3(x-1)}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2-1}=$

$$=\frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1}=\frac{x^2+4x}{x^2-1}$$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3=\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2}=$

$$=\frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{7x-6}{(x-1)^2}$$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9}-\frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9}=$

$$=\frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9}=\frac{-2x^2-x}{x^2-9}$$

40 Factoriza los polinomios siguientes:

a) $2x^2-5x+2$

b) $3x^2+x-2$

c) $4x^2+11x-3$

a) $2x^2 - 5x + 2$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \;\to\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Así, $2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x - 1)$.

b) $3x^2 + x - 2$

$$3x^2 + x - 2 = 0 \;\to\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, $3x^2 + x - 2 = 3(x + 1)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) = (x + 1)(3x - 2)$.

c) $4x^2 + 11x - 3$

$$4x^2 + 11x - 3 = 0 \;\to\; x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{8} =$$

$$= \frac{-11 \pm 13}{8} = \begin{cases} -3 \\ \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Luego, $4x^2 + 11x - 3 = 4(x + 3)\left(x - \dfrac{1}{4}\right) = (x + 3)(4x - 1)$.

41 En una división conocemos el divisor, $D(x)$, el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$: $D(x) = x^2 - 3x$; $C(x) = 3x + 2$; $R(x) = -5x$. Calcula el dividendo.

$D(x) = x^2 - 3x$ $\quad$ $C(x) = 3x + 2$ $\quad$ $R(x) = -5x$

Llamamos $P(x)$ al polinomio dividendo; se ha de cumplir, pues:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$P(x) = (x^2 - 3x) \cdot (3x + 2) - 5x = 3x^3 + 2x^2 - 9x^2 - 6x - 5x$

$P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 11x$

42 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

43 Calcula m para que el polinomio $P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ será divisible por $x + 1$ si $P(-1) = 0$.

$P(-1) = (-1)^3 - m(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$

$-1 - m - 5 - 2 = 0 \;\to\; m = -8$

44 El resto de la siguiente división es igual a –8:

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k?

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$P(2) = -8 \;\rightarrow\; 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \;\rightarrow\; 8k = -32 \;\rightarrow\; k = -4$

45 Halla el valor que debe tener m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

Llamamos $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$; dicho polinomio ha de ser divisible por $x + 2$, luego el resto ha de ser 0:

$P(-2) = 0 \;\rightarrow\; m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \;\rightarrow\; m = 22$

46 Calcula el valor de k para que el cociente de la división:

$$(x^3 - x^2 + kx - 1) : (x - 1)$$

sea igual a $x^2 + 1$. ¿Cuál será el resto?

Por Ruffini, calculamos el cociente:

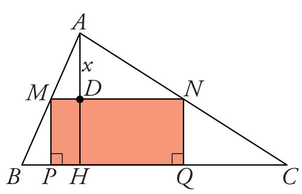
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & k \\ \hline & 1 & 0 & k & \boxed{k-1} \end{array}$$

El cociente de la división es $x^2 + k$, que ha de ser igual a $x^2 + 1 \;\rightarrow\; k = 1$

El resto será $k - 1 = 0$.

47 En el triángulo de la figura conocemos:

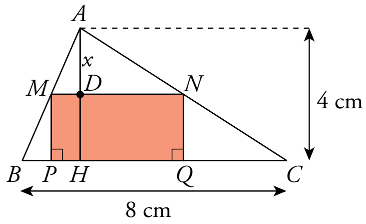
$$\overline{BC} = 8 \text{ cm} \qquad \overline{AH} = 4 \text{ cm}$$



Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC. Desde M y N se trazan perpendiculares a BC.

a) Expresa $\overline{MN}$ en función de x. (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x.



a) Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BD}}{x} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \rightarrow \overline{MN} = \frac{8 \cdot x}{4} \rightarrow \overline{MN} = 2x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x$

$$A_{\text{rectángulo}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = 2x(4 - x) = 8x - 2x^2$$

48 **Simplifica esta expresión:** $\left(1 - \dfrac{a}{a - b}\right) \dfrac{a - b}{b^2}$

$$\left(1 - \frac{a}{a - b}\right) \cdot \frac{a - b}{b^2} = \frac{a - b - a}{a - b} \cdot \frac{a - b}{b^2} = \frac{-b(a - b)}{(a - b)\,b^2} = \frac{-1}{b}$$

Página 79

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

49 **Escribe, en cada caso, un polinomio de segundo grado que tenga por raíces los números dados:**

a) 5 y –5 **b) 0 y 4** **c) 2 y 3** **d) –6 y 1**

a) $P(x) = (x - 5)(x + 5) \rightarrow P(x) = x^2 - 25$

b) $Q(x) = x(x - 4) \rightarrow Q(x) = x^2 - 4x$

c) $R(x) = (x - 2)(x - 3) \rightarrow R(x) = x^2 - 5x + 6$

d) $S(x) = (x + 6)(x - 1) \rightarrow S(x) = x^2 + 5x - 6$

50 **Escribe un polinomio de segundo grado que tenga solo la raíz 3.**

Para que un polinomio de 2º grado tenga solo la raíz 3, esta ha de ser doble, luego: $P(x) = (x - 3)^2 \rightarrow P(x) = x^2 - 6x + 9$

51 **Escribe un polinomio de segundo grado que no tenga raíces.**

Por ejemplo, $P(x) = 5x^2 + x + 3$ o $P(x) = x^2 + 4$

52 **Escribe un polinomio que tenga por raíces los números 2, 3 y –1.**

$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1) \rightarrow P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

53 **Escribe un polinomio de tercer grado que solo tenga una raíz.**

Tomamos un polinomio de segundo grando que no tenga raíces y lo multiplicamos por otro de grado uno, $x - a$. Por ejemplo: $x^2 + 1$ y $x - 8$.

$P(x) = (x^2 + 1)(x - 8) = x^3 - 8x^2 + x - 8$

54 **Inventa dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que verifiquen la siguiente condición: m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$**

Para que el m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$, basta tomar $P(x) = x(x - 3)$ y $Q(x) = x^2(x + 2)$, por ejemplo.

55 **Inventa dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que verifiquen la siguiente condición: M.C.D. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 4$**

Para que el M.C.D. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 4$, se pueden considerar, por ejemplo, $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)$ y $Q(x) = x(x - 2)(x + 2)$.

56 **Escribe tres polinomios de segundo grado que verifiquen, en cada caso, las condiciones que aparecen:**

$P(3) = 0$ [3 es raíz de $P(x)$]; $P(5) = 6$

$Q(-4) = 0$ [–4 es raíz de $Q(x)$]; $Q(-2) = -8$

$S(-2) = 0$ [–2 es raíz de $S(x)$]; $S(0) = -2$

$P(x) = (x - 3)(x + a)$ por ser 3 raíz de $P(x)$

$P(5) = (5 - 3)(5 + a) = 6 \;\rightarrow\; 2(5 + a) = 6 \;\rightarrow\; 5 + a = 3 \;\rightarrow\; a = -2$

$P(x) = (x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$

$Q(x) = (x + 4)(x + b)$ por ser –4 raíz de $Q(x)$

$Q(-2) = (-2 + 4)(-2 + b) = -8 \;\rightarrow\; 2(b - 2) = -8 \;\rightarrow\; b - 2 = -4 \;\rightarrow\; b = -2$

$Q(x) = (x + 4)(x - 2) = x^2 + 2x - 8$

De la misma manera, por ser –2 raíz de $S(x)$, este polinomio ha de ser de la forma $S(x) = (x + 2)(x + c)$:

$S(0) = -2 \;\rightarrow\; 2c = -2 \;\rightarrow\; c = -1 \;\rightarrow\; S(x) = (x + 2)(x - 1) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; S(x) = x^2 + x - 2$

57 **a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?**

b) Si –5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

58 **El polinomio $x^2 - 3x + 4$, ¿se puede descomponer en factores? Responde razonadamente.**

Buscamos las raíces del polinomio $x^2 - 3x + 4$ resolviendo la ecuación:

$x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$ no tiene solución real.

El polinomio $x^2 - 3x + 4$ es irreducible, no se puede descomponer en factores.

PROFUNDIZA

59 **Prueba que la siguiente igualdad es verdadera:**

$$\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a+b)^2}{ab} + \frac{b}{a} = -2$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a+b)^2}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{1 + a^2 - 1 - (a+b)^2 + b^2}{ab} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{ab} = \frac{-2ab}{ab} = -2$$

60 **Efectúa y simplifica:**

a) $\dfrac{x - 2y}{y} + \dfrac{y + 3x}{x} - 3$ b) $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy} - \dfrac{x + y}{x} - \dfrac{x - y}{y} + \dfrac{x}{2y}$

a) $$\frac{x - 2y}{y} + \frac{y + 3x}{x} - 3 = \frac{x(x - 2y) + y(y + 3x) - 3xy}{xy} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 3xy - 3xy}{xy} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x - y)^2}{xy}$$

b) $$\frac{x^2 + y^2}{2xy} - \frac{x + y}{x} - \frac{x - y}{y} + \frac{x}{2y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y(x + y) - 2x(x - y) + x^2}{2xy} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2yx - 2y^2 - 2x^2 + 2xy + x^2}{2xy} =$$

$$= \frac{-y^2}{2xy} = \frac{-y}{2x}$$

61 **Saca factor común en las siguientes expresiones:**

a) $(x + 5)(2x - 1) + (x - 5)(2x - 1)$ b) $(3 - y)(a + b) - (a - b)(3 - y)$

☛ ***El factor común es un binomio.***

a) $(x + 5)(2x - 1) + (x - 5)(2x - 1) = (2x - 1)(x + 5 + x - 5) = (2x - 1) \cdot 2x$

b) $(3 - y)(a + b) - (a - b)(3 - y) = (3 - y)[(a + b) - (a - b)] =$

$= (3 - y)(a + b - a + b) = 2b(3 - y)$

62 Factoriza las siguientes expresiones:

a) $ax - ay + bx - by$ **b)** $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$ **d)** $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

a) $ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y) = (a + b)(x - y)$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1 = 2x^2(y + 1) + (y + 1) = (2x^2 + 1)(y + 1)$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2 = 3x^2y + 3xy^2 + xy + y^2 = 3xy(x + y) + y(x + y) =$

$= (3xy + y)(x + y) = y(3x + 1)(x + y)$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1 = 2ab^3 + 2b^2 - (ab + 1) = 2b^2(ab + 1) - (ab + 1) =$

$= (2b^2 - 1)(ab + 1) = (\sqrt{2}\,b - 1)(\sqrt{2}\,b + 1)(ab + 1)$

63 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ **b)** $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2}$ **d)** $\dfrac{x^3 + 2x^2y - 2x^2 - 4xy + y^2x - 2y^2}{y^3 + 2xy^2 + 3y^2 + 6xy + x^2y + 3x^2}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{2b(ax + a^2 + 2b)} = \dfrac{a^2(2b - x)}{ax + a^2 + 2b}$

d) $\dfrac{x^3 + 2x^2y - 2x^2 - 4xy + y^2x - 2y^2}{y^3 + 2xy^2 + 3y^2 + 6xy + x^2y + 3x^2} = \dfrac{x^3 + 2x^2y + y^2x - 2(x^2 + 2xy + y^2)}{y^3 + 2xy^2 + x^2y + 3(x^2 + 2xy + y^2)} =$

$= \dfrac{x(x^2 + 2xy + y^2) - 2(x^2 + 2xy + y^2)}{y(y^2 + 2xy + x^2) + 3(x^2 + 2xy + y^2)} =$

$= \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2xy + y^2)}{(y + 3)(x^2 + 2xy + y^2)} = \dfrac{x - 2}{y + 3}$

64 **Opera y simplifica:**

a) $\dfrac{2a}{a-3b} - \dfrac{3b}{a+3b} - \dfrac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2}$

b) $\dfrac{bx-b}{x+1} + \dfrac{3bx}{x-1} + \dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2}$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right)\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$

d) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right) : \left(\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y}\right)$

a) $\dfrac{2a}{a-3b} - \dfrac{3b}{a+3b} - \dfrac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2} =$

$= \dfrac{2a(a+3b)-3b(a-3b)-(a^2+3ab+18b^2)}{a^2-9b^2} =$

$= \dfrac{2a^2+6ab-3ab+9b^2-a^2-3ab-18b^2}{a^2-9b^2} = \dfrac{a^2-9b^2}{a^2-9b^2} = 1$

b) $\dfrac{bx-b}{x+1} + \dfrac{3bx}{x-1} + \dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2} =$

$= \dfrac{b(x-1)(x-1)+3bx(x+1)-(3bx^2+bx+2b)}{x^2-1} =$

$= \dfrac{b(x^2-2x+1)+3bx^2+3bx-3bx^2-bx-2b}{x^2-1} =$

$= \dfrac{bx^2-2bx+b+2bx-2b}{x^2-1} = \dfrac{bx^2-b}{x^2-1} = \dfrac{b(x^2-1)}{x^2-1} = b$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right)\dfrac{x^2-y^2}{2xy} = \left[\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\right]\cdot\dfrac{x^2-y^2}{2xy} =$

$= \dfrac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{2xy} = \dfrac{4xy}{2xy}$

d) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right) : \left(\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y}\right) = \left(\dfrac{x+y-x+y}{x+y}\right) : \left[\dfrac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}\right] =$

$= \dfrac{2y}{x+y} : \left[\dfrac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}\right] =$

$= \dfrac{2y}{x+y} : \dfrac{-4xy}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{2y(x+y)(x-y)}{-4xy(x+y)} =$

$= -\dfrac{x-y}{2x} = \dfrac{y-x}{2x}$