Integración

1. Función primitiva

❖ *DEFINICIÓN:*

Una función F(x) es una ***primitiva*** *de f(x) cuando F(x) tiene por derivada la función f(x):*

F(x) es primitiva de f(x) ⇔ F'(x) =f(x)

EJEMPLOS:

a) La función $F(x) = x^3$ es una primitiva de *f (x) =* $3x^2$

b) La función $F(x) = \sqrt{x}$ es una primitiva de *f (x) =* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

El cálculo de primitivas se basa en el siguiente ***teorema fundamental del cálculo integral.***

❖ ***TEOREMA***:

Si F(x) y G(x) son dos primitivas de la función f(x), entonces F(x)-G(x)=C, siendo C una constante.

Demostración:

Definamos la función *H(x) =F(x)-G(x)* y hallemos su derivada:*H'*(x) *=F'(x)-G'(x)*

Por hipótesis, se verifica: *F'(x) =G'(x) =f(x)*

Luego: *H'(x) =f(x) -f(x) =* 0

Por tanto: *H(x) =F(x)-G(x) =C*

Como consecuencia de este teorema se deduce que para calcular todas las primitivas de una función f(x) es suficiente con calcular una de ellas F(x), ya que cualquier otra primitiva def(x) será de la forma F(x) + C, siendo C una constante.

EJEMPLO: Calcular las primitivas de la función f(x)=2x.

La función *F(x) =* x^2 es una primitiva de f(x)=2x, *pues F'(x) = 2x =f(x).*

Las infinitas primitivas de f(x)=2x son de la forma G(x) = x^2 + C, siendo C una constante.

El cálculo de primitivas es, pues, el proceso inverso al de derivación, con la diferencia de que si una función f(x) tiene derivada ésta es única, mientras que si una función f(x) tiene una primitiva, tiene infinitas primitivas.

$$\underset{\text{Infinitos resultados}}{F(x)+C} \xleftarrow{\text{Cálculo de primitivas}} \boldsymbol{f(x)} \xrightarrow{\text{Derivación}} \underset{\text{Resultado único}}{f'(x)}$$

2. Integral indefinida

❖ ***DEFINICIÓN:***

Se llama **integral indefinida** *de la función f(x) al conjunto de todas sus primitivas. Se simboliza por:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

siendo F(x) una primitiva cualquiera de f(x) y C una constante.

La expresión *f (x) dx* se lee *"integral de f(x) diferencial de x".*

La funciónf(x) se llama ***integrando o función subintegral.***

La diferencial de x, dx, indica que x es la ***variable*** de ***integración.***

F(x)+C es la ***solución general*** y C la ***constante*** de ***integración.*** Para cada valor de *C* se obtiene una primitiva def(x) *o* **solución particular** de la integral indefinida.

EJEMPLOS:

a) $\int 3dx = 3x + C$ *b)* $\int e^x dx = e^x + C$

3. Propiedades de la integral indefinida

Las propiedades siguientes son consecuencia directa de la definición de integral indefinida.

1. *La derivada de la integral de una función es la propia función:*

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

2. *La integral de una suma de varias funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de lasfunciones:*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

EJEMPLO: $\int (e^x + x)dx = \int e^x dx + \int x dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

3. *La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de lafunción:*

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

EJEMPLO: $\int 5e^x dx = 5 \cdot \int e^x dx = 5e^x + C$

4. Integrales inmediatas

Las integrales inmediatas son las que se obtienen directamente teniendo en cuenta las reglas de derivación.

La tabla siguiente muestra una lista de las integrales inmediatas más usuales.

INTEGRALES INMEDIATAS

Funciones elementales	**Funciones compuestas**
$\int dx = x + C$	$\int f'(x)dx = f(x) + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ;\ n \neq -1$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ ; a > 0,\ a \neq 1$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = a^{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

La justificación de esta tabla es inmediata: basta con derivar las funciones solución para obtener las funciones subintegrales.

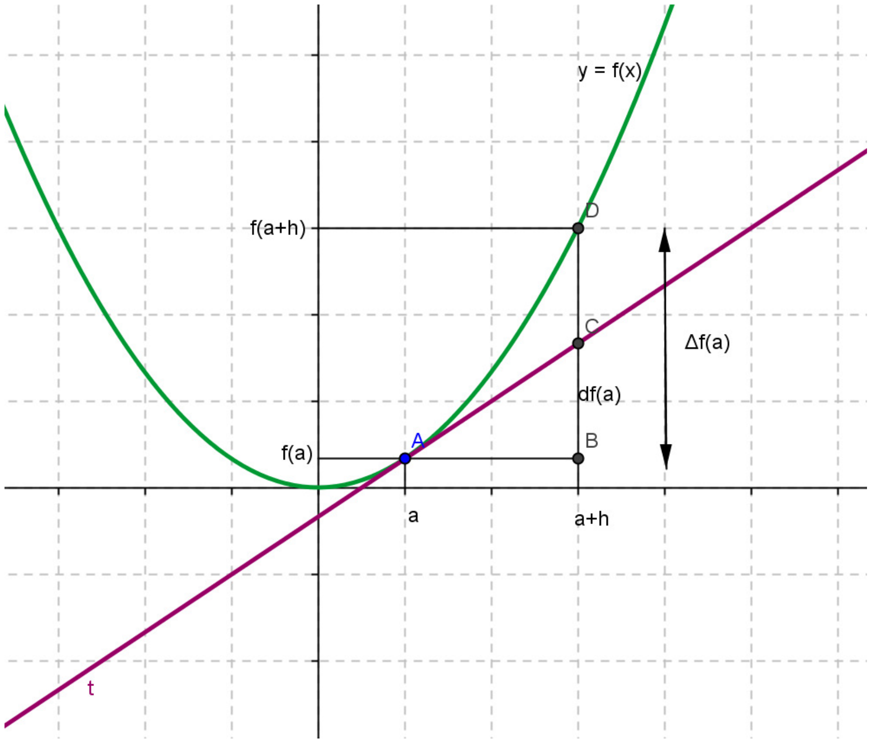
5. Diferencial de una función en un punto

Sea *y=f(x)* una función derivable en el punto de abscisa a.

El incremento o variación de la función f en el punto de abscisa a es:

$$\triangle f(a) = f(a+h) - f(a)$$

En la figura 1, el incremento de la función viene representado por BD. En dicha figura se ha trazado la recta **t** tangente a la curva representativa de la función f en el punto de abscisa a.



El valor BC se llama ***diferencial*** de la función *y=f(x)* en el punto de abscisa a, para el incremento h de la variable independiente. Se simboliza por *df(a) o* dy_a.

La diferencial de una función y=f(x) en un punto de abscisa a para un incremento h de la variable independiente es, pues, es el incremento correspondiente a la recta tangente a la curva representativa de la función f en el punto de abscisa a.

Sabiendo que la pendiente de la tangente a la curva en el punto *a, esf'(a),* se tiene:

$$df(a) = f'(a) \cdot h$$

Observamos que *df(a)* es una buena aproximación de $\Delta f(a)$ si el incremento h de la variable independiente es muy pequeño.

Para la función *g(x) = x* se tiene:

$$dg(a) = da = g'(a) \cdot h = 1 \cdot h = h$$

Es decir: $da = h$

Por tanto, la ***diferencial*** de una función *y=f(x)* en el punto de abscisa a, para el incremento *h = da,* de la variable independiente, se puede expresar como:

$$df(a) = f'(a) \cdot da$$

Si, en lugar de un punto de abscisa a, se toma un punto genérico de abscisa x, la diferencial de la función vendrá dada por:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

Despejando f'(x) en la expresión anterior:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

se obtiene la derivada de una función como un cociente de diferenciales, que es la notación utilizada por Leibniz.

Si F(x) es una primitiva de f(x), entonces *F'(x)=f(x) y dF(x)=f(x).dx.* Ésta es una de las razones por las que la integral indefinida de la función f(x) se escribe como:

$$\int f(x)dx$$

OBSERVACIÓN

El incremento y la diferencial de una función dependen de la abseisa x del punto considerado así como del incremento h de la variable independiente; es decir, ambos dependen de dos variables. Por ello, de fortna rigurosa habría que denotarlos por *Δf (x, h) y d f (x, h),* respectivamente. Sin embargo este rigor en el concepto supera los objetivos de este curso, por lo que continuaremos usando la notación *df (x) = f'(x).h o bien d f (x) = f'(x).dx.*

6. Métodos de integración

Los métodos de integración tienen por objeto resolver integrales no inmediatas. Son unos procedimientos mediante los cuales se transforma la integral propuesta en una integral inmediata o más fácil de calcular.

6.1. Integración por descomposición

Consiste en hacer transformaciones algebraicas elementales (por ejemplo: operar en el integrando, multiplicar y dividir por una constante, etc.) y aplicar las propiedades 2 y 3 de la integral indefinida, de manera que la integral dada se pueda descomponer en integrales más sencillas o inmediatas.

EJEMPLOS:

(a) $\int (9x^2 + 6x + 1)dx = 9\int x^2 dx + 6\int x dx + \int dx = 3x^3 + 3x^2 + x + C$

(b) $\int \frac{3x^2+5x-4}{x^2}dx = \int\left[3+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}\right]dx = 3\int dx + 5\int \frac{dx}{x} - 4\int x^{-2}dx =$
$= 3x + 5\ln|x| + \frac{4}{x} + C$

6.2. Integración por sustitución o cambio de variable

Consiste en transformar el integrando en una integral inmediata o más fácil de integrar, mediante un cambio de la variable.

El éxito o el fracaso del método depende de que el cambio de variable haya sido acertado o no. En general, podemos decir que si el cambio de variable ha sido adecuado se consigue simplificar la integral; por el contrario, si la integral se complica debemos pensar que el cambio de variable no ha sido afortunado.

EJEMPLOS:

(a) $\int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-2| + C$

Hacemos el cambio de variable: t = x - 2
Diferenciando: dt = dx

(b) $\int e^{5x}dx = \int e^t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\cdot e^t + C = \frac{1}{5}\cdot e^{5x} + C$

Hacemos el cambio de variable: t = 5x
Diferenciando: dt = 5.dx ⇒ $dx = \frac{1}{5}dt$

6.3. Integración de funciones racionales sencillas

Para integrar funciones racionales (división de funciones polinómicas) se sigue el proceso que se detalla a continuación.

Sea la integral $\int \frac{A(x)}{B(x)}dx$, donde *A(x) y B(x)* son dos funciones polinómicas.

Distinguiremos dos casos:

♦ **Si el grado de *A (x)* es menor que el grado de *B(x):***

1. Se descompone la función $\frac{A(x)}{B(x)}$ en suma de fracciones simples. Para hacer esto, se procede así:
1.1. Se descompone B(x) en factores irreducibles. Puede suceder que las raíces de B(x) sean reales o complejas, simples o múltiples. Sólo trataremos el caso de raíces reales simples.

Suponiendo que las raíces encontradas sean x_1, x_2, x_3, ... , x_n la descomposición de *B(x)* es:
B(x) = (x - x_1) . (x - x_2) . (x - x_3) .... (x - x_n). a_n siendo a_n el coeficiente del término de mayor grado.
1.2. La función $\frac{A(x)}{B(x)}$ se puede descomponer así:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)\cdot a_n}$$

Los números $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ se puede hallar por el método del "valor numérico", tal como se indica en el ejemplo siguiente.
2. Se calculan las integrales de las fracciones simples obtenidas que son casi inmediatas.

EJEMPLO: Calcula $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$

1. Descomposición de la función $\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ en suma de fracciones simples:

1. 1. Descomposición en factores del polinomio $x^2 - 3x + 2$*:*

Para hallar las raíces del polinomio $x^2 - 3x + 2$ resolvemos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ obteniendo como resultado x=1 *y x=2.*

Por lo que: $x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2)$

1.2. Descomposición de la función $\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{x^2-3x+2} \Rightarrow$$

$$A(x) = 2x + 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

Calcularemos A *y B* por el método del valor numérico:

A(1) = 3 = - A => A = -3 ; A(2) = 5 = B

2. Cálculo de $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-3}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-2} dx = -3 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C$

♦ **Si el grado de *A (x)* es igual o mayor que el grado de *B(x):***

1. Se divide A(x) entre B(x), obteniéndose un cociente C(x) y un resto R(x) cuyo grado es menor que el grado de B(x).

La fracción $\frac{A(x)}{B(x)}$ se puede expresar así: $\frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

2. Se descompone la integral $\int \frac{A(x)}{B(x)}dx$ en la suma de dos integrales:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}dx$$

La integral $\int C(x)dx$ se calcula fácilmente por ser la integral de un polino mio.

3. Se calcula la integral $\int \frac{R(x)}{B(x)}dx$ por el método seguido en el **caso 1**.

EJEMPLO: Calcula $\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx$

1. División de *A (x) = 3x³ + 5x* por *B(x) = x² - x - 2:*
Cociente: C(x) *= 3 x + 3*
Resto: *R (x) = 14x + 6*

2. $\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx = \int (3x+3)dx + \int \frac{14x+6}{x^2-x-2}dx = \frac{3}{2}x^2 + 3x + \int \frac{14x+6}{x^2-x-2}dx$

3. Cálculo de la integral $\int \frac{14x+6}{x^2-x-2}dx$ por descomposición de $\frac{14x+6}{x^2-x-2}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{x^2-x-2} \Rightarrow 14x+6 = A(x+1) + B(x-2)$$

Si x = -1 $\Rightarrow -14+6 = -3B \Rightarrow B = \frac{8}{3}$

Si x = 2 $\Rightarrow 28+6 = 3A \Rightarrow A = \frac{34}{3}$

$$\int \frac{14x+6}{x^2-x-2}dx = \frac{34}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{34}{3}\ln|x-2| + \frac{8}{3}\ln|x+1| + C$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx = \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{34}{3}\ln|x-2| + \frac{8}{3}\ln|x+1| + C$$

6.4. Integración por partes

Sean u y v dos funciones derivables en un intervalo [*a, b*].

Diferenciando el producto, u . v, de dichas funciones, resulta: d(u . *v*) *= u dv + v du*

Integrando los dos miembros de la ecuación anterior, se obtiene: $u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$
De donde se obtiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Este procedimiento permite calcular la integral $\int u \cdot dv$, conociendo la integral $\int v \cdot du$. Por tanto, el método será útil cuando la segunda integral sea más fácil de resolver que la primera.

En algunos casos, es necesario aplicar el método de integración por partes varias veces hasta conseguir que la integral sea inmediata o reducible a inmediata.

EJEMPLOS:

(a) Calcula: $\int \ln x \, dx$

Si $\left\{ \begin{array}{c} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{array} \right\}$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

(b) Calcula: $\int x \cdot e^x dx$

Si $\left\{ \begin{array}{c} u = x \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} du = dx \\ v = e^x \end{array} \right\}$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

7. El problema del cálculo del área

Sea una curva de ecuación y=f(x), continua, positiva en el intervalo [a,b] (figura 2).

Pretendemos hallar el área S de la figura limitada por la curva, el eje de abscisas y las rectas *x=a y* x=b (esta figura se llama *trapecio mixtilíneo).*

Para ello, se divide el intervalo [a, b] *en* n subintervalos de la misma amplitud h, mediante los puntos de abscisas $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ siendo: $h = \frac{b-a}{n}$.

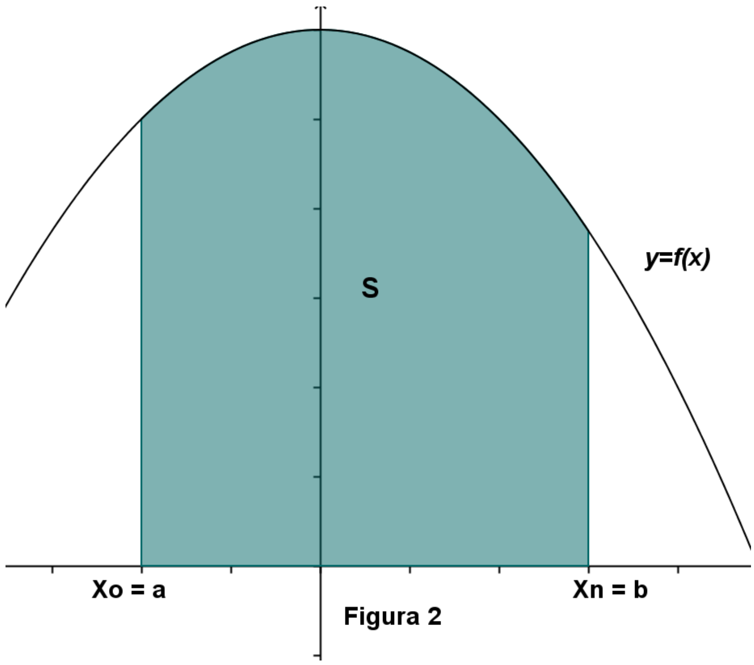


Figura 2

El área S se puede calcular, de manera aproximada, hallando la suma de las áreas de los rectángulos de base igual a la amplitud h de cada subintervalo y de altura igual al mínimo de la función en ese subintervalo (figura 3). La suma s_n así obtenida será menor o igual que la superficie S buscada:

$$S \geq s_n = f(m_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(m_2)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(m_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\cdot h$$

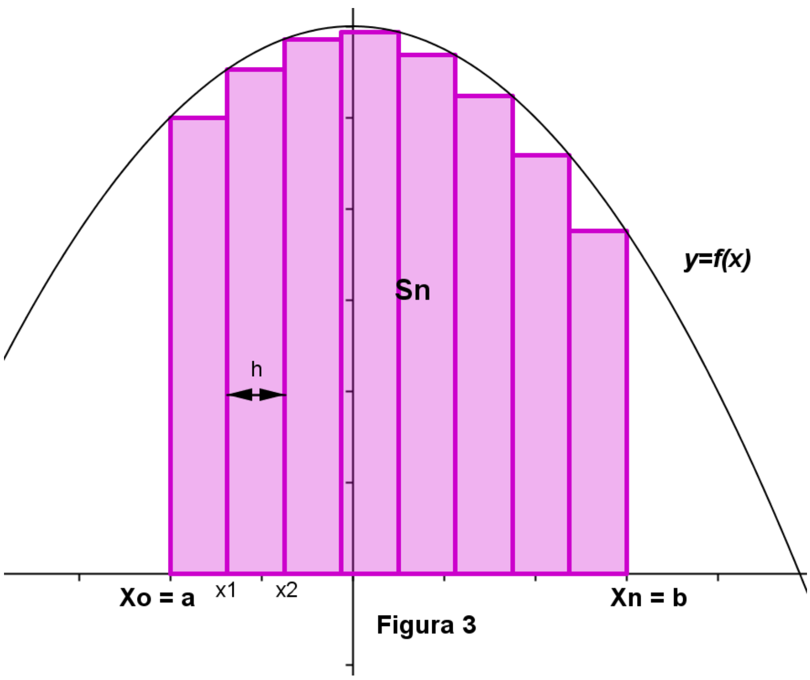


Figura 3

Análogamente, se puede calcular la suma de las áreas de los rectángulos de base igual a la amplitud de cada subintervalo y de altura igual al máximo de la función en ese subintervalo (figura 4).

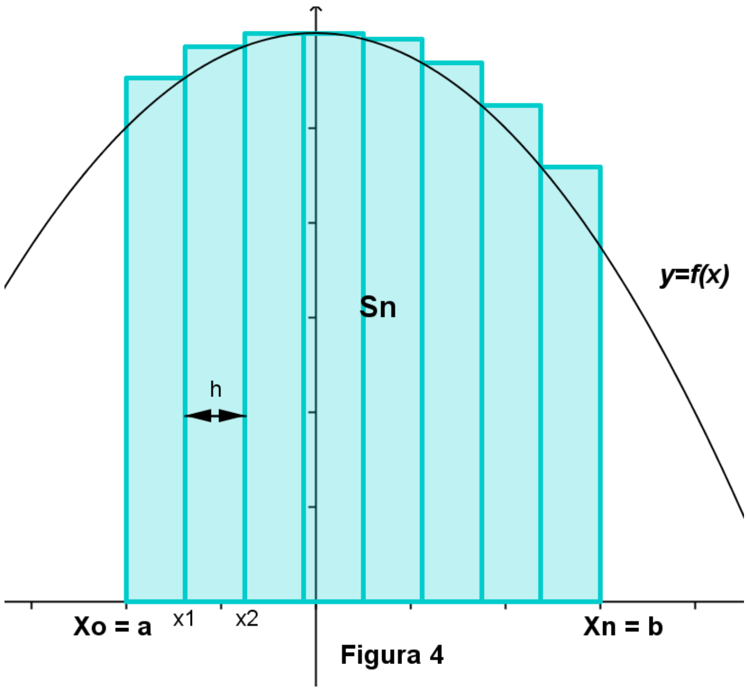


Figura 4

La suma S_n así obtenida será mayor o igual que la superficie S buscada:

$$S \leq S_n = f(M_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(M_2)\cdot(x_2 - x_1) + ... + f(M_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot h$$

El error que se comete al tomar s_n *o* S_n como valor de S es menor que $S_n - s_n$. Podemos demostrar que dicha diferencia depende sólo del número, n, de partes en que se divide el intervalo [a,b], y que disminuye al aumentar n, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0, \text{ es decir }, \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Como $s_n \leq S \leq S_n$ para todo n, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq S \leq \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

También es válido el razonamiento cuando la función tiene en [a, b] un número finito de discontinuidades con salto finito.

EJEMPLO:

Calcularemos las sumas superior e inferio de la región acotada por la gráfica de f(x) = x^2 y el eje x entre x = 0 y x = 2.

SOLUCIÓN: Para comenzar partimos el intervalo [0,2] en *n* subintervalos, cada uno de longitud

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

La figura 5 muestra los extremos de los subintervalos y varios rectángulos inscritos y circunscritos.

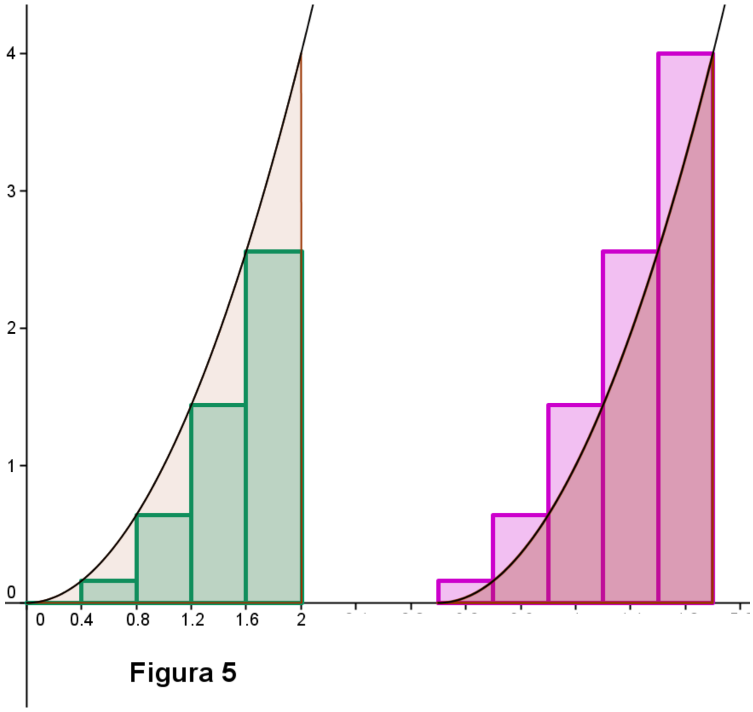


Figura 5

Puesto que f(x) es creciente en el intervalo [0,2] el valor mínimo en cada subintervalo ocurre en el extremo inferior y el máximo en el extremo superior. Por tanto, tenemos:

Extremos inferiores

$$m_i = 0 + (i-1)\cdot\frac{2}{n} = \frac{2(i-1)}{n}$$

Extremos superiores

$$M_i = 0 + i\cdot\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$$

Utilizando los extremos inferiores, la **suma inferior** es:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\cdot h = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2(1-i)}{n}\right]^2\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}\cdot(i^2-2i+1) =$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right] =$$

$$= \frac{4}{3n^3}(2n^3-3n^2+n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Utilizando los extremos superiores, la **suma superior** es:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot h = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2i}{n}\right]^2\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}\cdot i^2 =$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$= \frac{4}{3n^3}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Si bien es cierto que la suma inferior es menor que la suma superior, también podemos comprobar que la diferencia entre ambas disminuye cuando $n \to \infty$. y que ambas se aproximan a 8/3.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right] = \frac{8}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right] = \frac{8}{3}$$

Puesto que ambas sumas se aproximan al mismo límites, es natural definir el área de la región como dicho límite.

8. Integral definida

El razonamiento del apartado anterior que ha dado como resultado una fórmula para el cálculo del área, se generaliza a continuación para definir el concepto de *integral definida en* un intervalo [*a, b*] donde la función *f (x)* es continua y puede tomar valores positivos y negativos.

Las sumas s_n *y* S_n se definen del mismo modo, pero ahora estas sumas no representan en general áreas, pues la función puede tomar valores negativos en ciertos subintervalos.

Si *f (x)* es una función continua en el intervalo [*a,* b] o que tiene un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito en [*a,b*] se puede demostrar, aunque nosotros no lo haremos, que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1})$$

Este límite común se llama *integral definida*, entre a y b, de la función f(x). Se simboliza por:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

❖ ***DEFINICIÓN***:

Sea f (x) una función continua en [*a, b*] *o que tiene un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito en* [*a, b*].

*La **integral definida**, entre ay b, de lafunción f (x) se define como:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1})$$

siendo $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$; $x_0 = a$; $x_n = b$.

a y b son los límites de integración (a: límite inferior y b: límite superior).

- Si *f (x)* es positiva en [*a, b],* la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área de la figura limitada por la curva representativa de *f (x),* el eje OX y las rectas x = *a y x = b.*
- Si *f (x)* es negativa en [*a, b*]*,* el valor absoluto de la integral definida *f (x) dx* es igual al área de la figura limitada por la curva representativa de *f (x),* el eje OX y las rectas x = *a y x = b.*

9. Relación entre el área y la función primitiva

Sea f una función continua y positiva definida en el intervalo [a,b], cuya gráfica se representa en la figura 6.

Definimos la función área, S(x), como la función que determina el área limitada por la gráfica de f el eje de abscisas, la recta x = *a* y la ordenada en un punto variable x $\in [a, b]$ Es decir:

S(x) = Área del trapecio mixtilíneo(ANMD) = $\int_a^x f(t)\,dt$, siendo S(a)=0

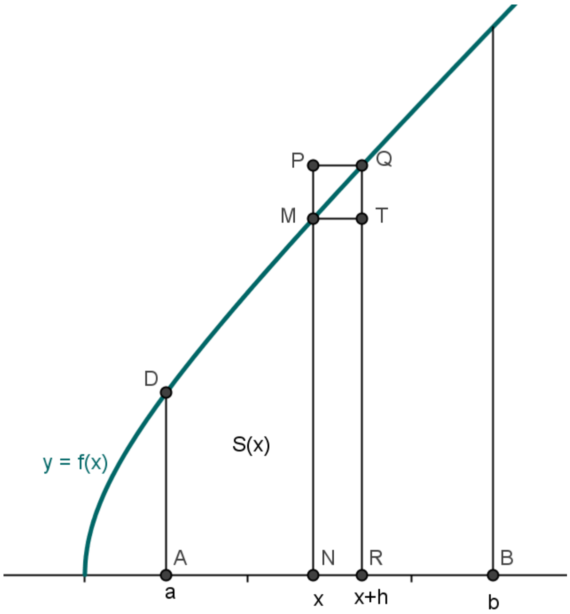


Figura 6

Sea Q un punto de la gráfica de f, de abscisa x + h, próximo a M.

El área del trapecio mixtilíneo (ARQD) es *S(x + h)* y la del trapecio mixtilíneo (NRQM) es *S(x + h) - S(x).*

Observando la figura 6, vemos que se verifica:

Área del rectángulo NRTM Área del trapecio mixtilíneo (NRQM) Área del rectángulo NRQP

Es decir:

$$f(x)\cdot h \le S(x+h) - S(x) \le f(x+h)\cdot h$$

Dividiendo por *h:*

$$f(x) \le \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le f(x+h)$$

Calculando el límite:

$$\lim_{h\to 0} f(x) \le \lim_{h\leftarrow 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(x+h) \Rightarrow f(x) \le \lim_{h\leftarrow 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le f(x)$$

Como $\lim_{h\leftarrow 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = S'(x)$, resulta:

S'(x) *= f (x)*

Podemos, pues, enunciar el teorema siguiente:

- ***TEOREMA:***

Sea f una función continua y positiva en el intervalo [*a, b*].

La función área, S(x) = $\int_a^x f(f)\, dt$ *, del trapecio mixtilíneo determinado por la gráfica de f el eje de abscisas, la recta x = a* y la ordenada en un punto variable x es *una función primitiva de f tal que S(a) = 0. Es decir:*

$$S'(x) = f(x) \quad y \quad S(a) = 0$$

De acuerdo con este teorema, podemos escribir: *S(x) =* $\int_a^x f(f)\, dt = F(x) + C$,siendo F(x) una función primitiva de f y C una constante que vamos a determinar a continuación.

Como *S(a)* = 0, entonces:

$$S(a) = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

Luego:

$$S(x) = \int_a^x f(f)\ dt = F(x) - F(a)$$

siendo F una primitiva cualquiera de f

El área, *S(b)* del trapecio mixtilíneo (ABCD) será:

$$S(b) = \int_a^b f(f)\ dt = F(b) - F(a)$$

Se escribe también de la forma:

$$S(b) = \int_a^b f(f)\ dt = [F(t)]_a^b$$

Podemos, pues, enunciar el teorema siguiente:

❖ ***TEOREMA:***

Sea f una función continua y positiva en el intervalo [*a, b*].

El área del trapecio mixtilíneo determinado por la gráfica de f el eje de abscisas y las rectas

x = a y x = b es:

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

a

siendo F una primitiva cualquiera def

*Esta expresión se conoce con el nombre de **Regla de Barrow**.*

EJEMPLO: Hallar, aplicando la regla de Barrow, el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de abscisas y la recta x = 2 (figura 7)

$$Área = \int_0^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Obsérvese que este resultado coincide con el **del ejemplo** del epígrafe 7.

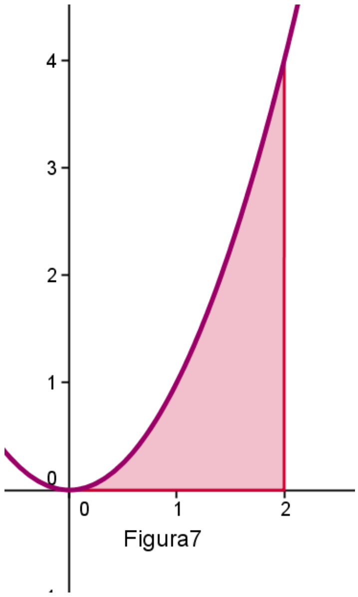


Figura7

10. Regla de Barrow

La regla de Barrow obtenida para el cálculo del área, se puede generalizar para hallar la integral definida de cualquier función continua.

❖ ***REGLA DE BARROW:***

Sea f unafunción continua en el intervalo [a, b] y sea F una primitiva cualquiera de f definida en [a, b].

*La **integral definida**, entre a y b, de la función f es el número real F(b) - F(a). Es decir:*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

EJEMPLO: Calcular la integral definida: $\int_2^4 2x\,dx$

Calcularemos, en primer lugar, la integral indefinida: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

De acuerdo con la regla de Barlow, la integral definida será:

$$\int_2^4 2x\,dx = [x^2]_2^4 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

11. Función integral definida

❖ ***DEFINICIÓN:***

Si f es unafunción continua en [a,b] que tiene primitivas.

Podemos definir la función A talque a cada $x \in [a,b]$ *le corresponde la integral definida, entre a y x, de f:*

$$A : x \to A(x) = \int_a^x f(t)\, dt = [f(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

La función A(x) se llama **función integral definida.**

EJEMPLO: Calcula la función integral definida: $\int_2^x 3t^2\, dt$

$$\int_2^x 3t^2\, dt = [t^3]_2^x = x^3 - 8$$

12. Propiedades de la integral definida

Sean f y *g* dos funciones que admiten primitivas en un intervalo I.

Sean *a, b y* c tres puntos del intervalo I tales que a $\leq$ *c b.*

Se verifican las propiedades siguientes:

1. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

2. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

3. $\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

4. $\int_a^b (f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

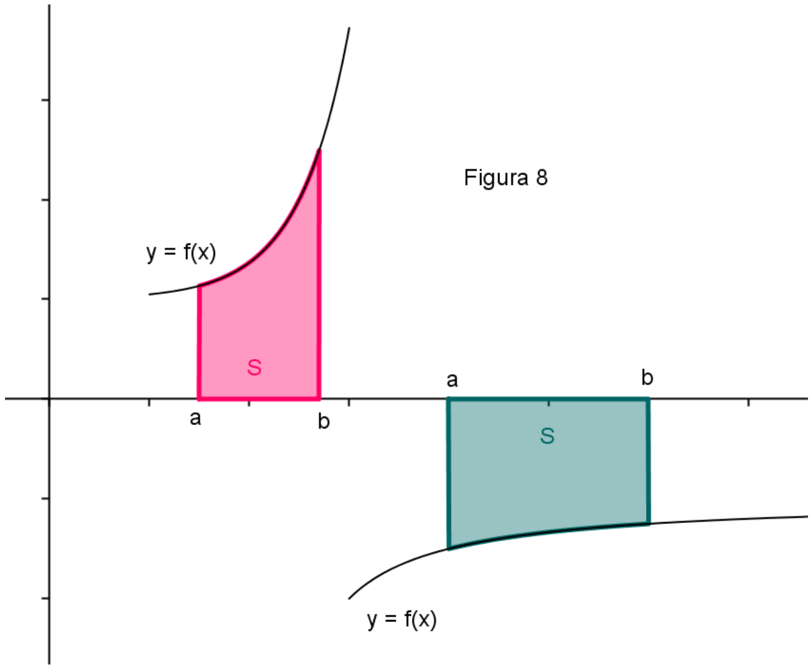
13. Aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas planas

La regla de Barrow permite calcular el área de figuras planas limitadas por gráficas de funciones.

Distinguiremos varios casos:

1. Área limitada por una curva, el eje OX y las rectas *x = a y x = b:*

a) Si f tiene signo constante en [*a, b*] (figura 8):

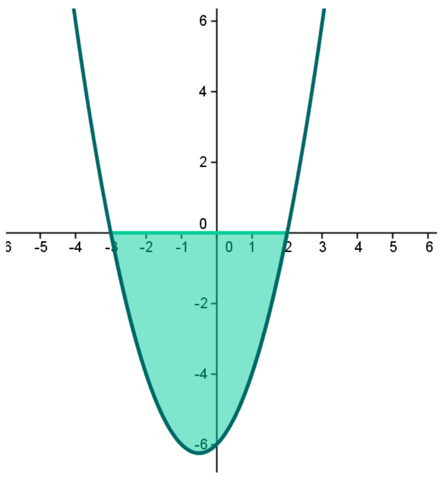


En este caso: $S = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$

EJEMPLO: Hallar el área limitada por la parábola $f(x) = x^2 + x - 6$ y el eje OX. Hallamos, en primer lugar, los puntos de corte de la parábola con el eje OX. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} y = x^2 + x - 6 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

cuyas soluciones son los puntos (-3, 0) y *(2, 0).* La representación gráfica aproximada de la función es la de la figura 9. Tenemos que calcular el área, S, de la zona sombreada:



$$S = \left| \int_{-3}^{2} (x^2 + x - 6)dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^{2} \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12 \right) - \left(-\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18 \right) \right| = \left| \frac{-125}{6} \right| = \frac{125}{6}$$

b) Si f cambia de signo un número finito de veces en [*a, b*] (figura 10):

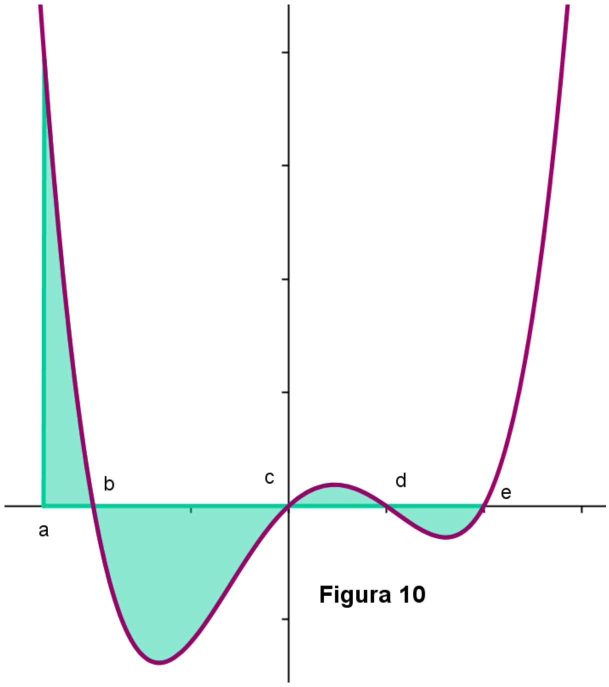


Figura 10

En este caso se calculan las áreas de los distintos intervalos, siendo el área, S, total igual a la suma de las áreas:

$$S = \left| \int_{a}^{b} f(x)dx \right| + \left| \int_{b}^{c} f(x)dx \right| + \left| \int_{c}^{d} f(x)dx \right| + \left| \int_{d}^{e} f(x)dx \right|$$

EJEMPLO: Hallar el área limitada por la curva *f (x) =* $x^3 - x$ y el eje OX.

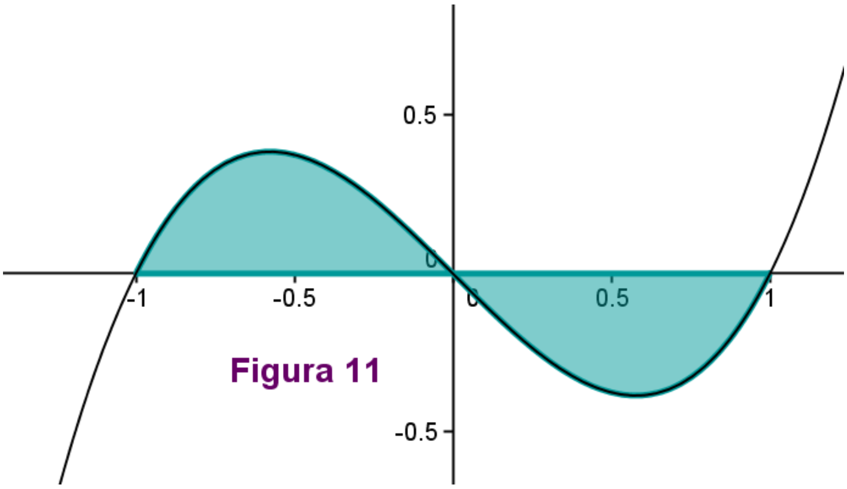
Hallamos, en primer lugar, los puntos de corte de la curva con el eje OX. Para ello, resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 0 \end{cases}$

cuyas soluciones son los puntos (- 1, 0), (0, 0) y (1, 0).

La representación gráfica aproximada de la función es la de la figura 11. Tenemos que calcular el área, S, de la zona sombreada:

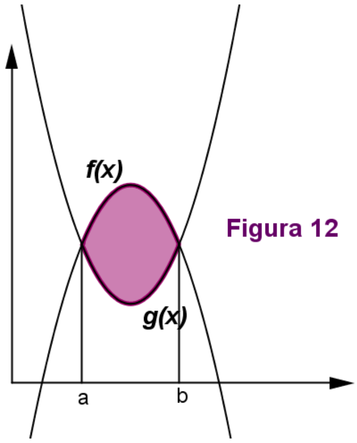
$$S = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - x)dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right| =$$

$$\left| -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



2. Área limitada por dos curvas:

a) Si f *y* g son ambas positivas o negativas en [*a, b*] (figura 12):



En este caso: $S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$

EJEMPLO: Hallar el área limitada por las curvas *f (x) =* $x^2 + 1$ y *g(x) =* $-x^2 + 9$.

Hallamos, en primer lugar, los puntos de corte de las dos curvas. Para ello, resolvemos el sistema:

cuyas soluciones son los puntos *(-2,5), (2,5).*

La representación gráfica aproximada de las funciones es la de la figura 13. Tenemos que calcular el área, *S,* de la zona sombreada:

$$S = \left| \int_{-2}^{2} ((x^2+1) - (-x^2+9))dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} \right| = \frac{64}{3}$$

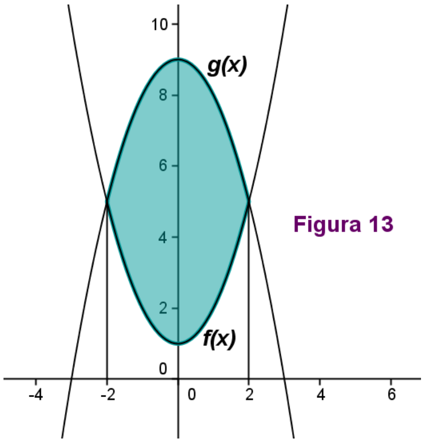


Figura 13

b) Si f y *g* no tienen el mismo signo en [*a,* b] figura 14):

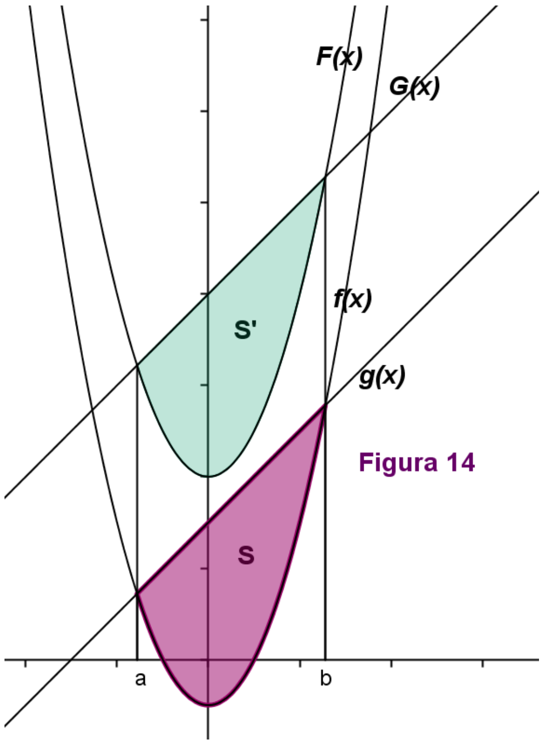


Figura 14

En este caso se puede aplicar también la fórmula anterior:

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$

En efecto:
Consideremos las funciones F(x) *= f (x) + K y G(x) = g(x) +* K, definidas aplicando a f(x) y g(x) una traslación definida por el vector (O,K) de modo que F(x) ≥ 0 *y G(x)* en [*a*,*b*].
Las gráficas de *F(x) y G(x)* se representan en la figura 14.
Entonces:

$$S' = \left| \int_a^b (F(x) - G(x))dx \right| = \left| \int_a^b ((f(x) + k) - (g(x) + k))dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$

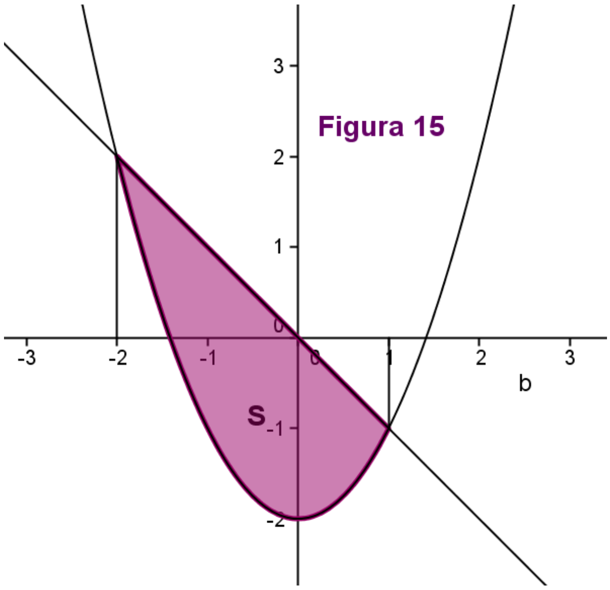
Como *S* = S', entonces:

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$

EJEMPLO: Hallar el área linútada por la parábola *f (x)* = $x^2 - 2$ y la recta *g(x)* = -x

Hallamos, en primer lugar, los puntos de corte de las dos líneas. Para ello, resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = -x \end{cases}$
cuyas soluciones son los puntos (-2,2), (1,-1).

La representación gráfica aproximada de las funciones es la figura 15. Tenemos que calcular el área, S, de la zona sombreada:



$$S = \left| \int_{-2}^{1} ((x^2 - 2) - (-x))dx \right| = \left| \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)dx \right| = \left| \left[\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{1} \right| = \tfrac{9}{2}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

1.1 $\int \frac{1}{x^3}dx$ 1.2 $\int x\cdot \sqrt[3]{x}\cdot dx$ 1.3 $\int \frac{2}{\sqrt[3]{8x^2}}dx$

1.4 $\int \frac{(2x+3)^2}{x}dx$ 1.5 $\int \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{x}}\cdot dx$ 1.6 $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\cdot dx$

1.7 $\int(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})dx$ 1.8 $\int\left(\sqrt{\frac{2}{x}}+\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)dx$

1.9 $\int \frac{x^3-12x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$ 1.10 $\int\left(\frac{2x^{\frac{2}{3}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}+1\right)dx$

2. Calcula las siguientes integrales de funciones potenciales compuestas:

2.1 $\int(x+1)^2dx$ 2.2 $\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$ 2.3 $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^7}dx$

2.4 $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ 2.5 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4x^2+5}}\cdot dx$ 2.6 $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$

2.7 $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ 2.8 $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx$ 2.9 $\int \frac{7x}{4+x^2}dx$

2.10 $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 2.11 $\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}dx$ 2.12 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-5}}$

3. Calcula las siguientes integrales de tipo logarítmico:

3.1 $\int \frac{2x^2}{6x^3+1}dx$ 3.2 $\int \frac{dx}{3x-4}$ 3.3 $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

3.4 $\int \frac{x^2\cdot dx}{(1+5x^3)}$ 3.5 $\int \frac{dx}{3x+5}$ 3.6 $\int \frac{(x-1)dx}{3x^2-6x+5}$

3.7 $\int \frac{e^{3x}\cdot dx}{e^{3x}+7}$ 3.8 $\int \frac{dx}{ax+b}$ 3.9 $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

3.10 $\int \frac{1}{x\cdot\ln(3x)}dx$ 3.11 $\int \frac{4}{(3x+1)\cdot\ln(3x+1)}dx$ 3.12 $\int \frac{x^2\cdot dx}{x^3+5}$

4. Calcula las siguientes integrales de tipo exponencial:

4.1 $\int e^{-2x}dx$ 4.2 $\int e^{-x^2}\cdot xdx$ 4.3 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

4.4 $\int e^{x^3+1}\cdot x^2dx$ 4.5 $\int x\cdot e^{x^2+8}dx$ 4.6 $\int \frac{7^x}{5^x}dx$

4.7 $\int e^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$ 4.8 $\int 4^{5x}\cdot dx$ 4.9 $\int(6^x)^2dx$

4.10 $\int 5^x\cdot 9^xdx$ 4.11 $\int e^{\frac{4}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$ 4.12 $\int e^{5x-3}dx$

5. Calcula por partes las siguientes integrales:

5.1 $\int xe^x dx$ 5.2 $\int \ln x dx$ 5.3 $\int \ln(x+1) dx$

5.4 $\int x \cdot \sqrt{x+5}\, dx$ 5.5 $\int (1-x)e^x dx$ 5.6 $\int x \cdot \ln 2x dx$

5.7 $\int x \cdot e^{-x} dx$ 5.8 $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ 5.9 $\int (1-x) \cdot e^x dx$

6. Calcula las siguientes integrales racionales:

6.1 $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$ 6.2 $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-5x+6}$ 6.3 $\int \frac{1+2x}{x^2+1} dx$

6.4 $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x-6}$ 6.5 $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$ 6.6 $\int \frac{x+2}{x^2-x-6} dx$

6.7 $\int \frac{x^2-6x+7}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$ 6.8 $\int \frac{(6x+8)dx}{x^2-5x+4}$ 6.9 $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2-5x+4}$

7. Calcula las siguientes integrales:

7.1 $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^x+e^{-x}}$ 7.2 $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 7.3 $\int \frac{(x^2-\sqrt{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x}}$

7.4 $\int \frac{x^3 dx}{1+x^4}$ 7.5 $\int \frac{2^{\frac{1}{x}} \cdot dx}{x^2}$ 7.6 $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3+3}\, dx$

7.7 $\int \sqrt[3]{2x+1}\, dx$ 7.8 $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+5} dx$ 7.9 $\int x \cdot 5^{3x^2} \cdot dx$

7.10 $\int \frac{2}{x-2} dx$ 7.11 $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$ 7.12 $\int \frac{x}{(x^2+4)^4} dx$

7.13 $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$ 7.14 $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$ 7.15 $\int (x^{-3}+x^{-2}) dx$

8. Calcula la integral definida dada:

8.1 $\int_0^1 (5x^4-8x^3+1)dx$ 8.2 $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+x^{\frac{-3}{2}}\right)dx$

8.3 $\int_{-1}^2 30(5x-2)^2 dx$ 8.4 $\int_0^1 2xe^{x^2-1} dx$

8.5 $\int_0^1 (x-3)(x^2-6x+2)^3 dx$ 8.6 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

8.7 $\int_{-3}^{-1} \frac{t+1}{t^3} dt$ 8.8 $\int_0^6 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$

8.9 $\int_1^3 (1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2})\, dt$ 8.10 $\int_{\ln 0'5}^{\ln 2} (e^t-e^{-t})\, dt$

9. Un estudio indica que dentro de x meses la población de un cierto pueblo estará creciendo al ritmo de $\left[2+6\sqrt{x}\,\right]$ personas por mes. ¿En cuánto crecerá la población del pueblo durante los próximos 4 meses?

10. En una cierta comunidad, la demanda de gasolina está creciendo a un ritmo de:

$4 \cdot e^{0'05t}$ millones de gasolina por año.

¿Cuánta gasolina se consumirá en la comunidad en los próximos tres años?

11. Los promotores de una feria de distrito estiman que t horas después de la apertura a las 9:00 AM los visitantes estarán entrando en la feria a un ritmo de:

$$-4(t+2)^3+54(t+2)^2 \text{ personas por hora.}$$

¿Cuánta gente entrará en la feria entre las 10:00 AM y mediodía?

12. Un fabricante ha encontrado que el coste marginal (ritmo de cambio del coste) es de $3q^2-60q+400$ dólares por unidad cuando se han producido q unidades. El coste total de producción de las dos primeras unidades es de 900 dólares. ¿Cuál es el coste total de producción de la cinco primeras unidades?

13. El valor de reventa de una cierta maquinaria industrial decrece a un ritmo que cambia con el tiempo. Cuando la maquinaria tiene t años, el ritmo al que está cambiando su valor es $220\cdot(t-10)$ dólares por año. Si la maquinaria se compró nueva por 12000 dólares, ¿cuánto valdrá 10 años después?

14. Un árbol ha sido trasplantado y después de x años está creciendo a un ritmo de :

$$1+\frac{1}{(x+1)^2} \text{ metros por año.}$$

Pasados dos años ha alcanzado una altura de 5 metros. ¿Qué altura tenía cuando fue trasplantado?

15. Cuando tiene x años, una cierta maquinaria industrial genera ingresos a un ritmo de **R(x)** = $5000-20x^2$ dólares por año y da por resultado unos costes que se acumulan a un ritmo de **C(x)** = $2000+10x^2$.

> **(a)** ¿Cuántos años es provechoso el uso de la maquinaria?
> **(b)** ¿Cuáles son las ganancias netas totales generadas por la maquinaria durante el periodo de tiempo de la parte (a)?

16. Halla el área de la siguientes regiones:

> **(a)** Región acotada por la curva $y=-x^2+4x-3$ y el eje OX.
> **(b)** Región acotada por las curvas $y=x^2+1$ e $y=2x-2$ entre x = -1 y x = 2.
> **(c)** Región acotada por las curvas $y=x^3$ e $y=x^2$.
> **(d)** Región acotada por la curva $y=x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.