

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 Escribe las siguientes informaciones utilizando desigualdades.

- a) He sacado, por lo menos, un 7 en el examen.
- b) Tengo tarifa plana de ADSL de ocho de la mañana a seis de la tarde.
- a) $x \geq 7$
- b) $8 \leq x \leq 18$

4.2 Construye una tabla que te permita encontrar los valores de x que satisfacen cada una de estas inecuaciones.

- a) $2x + 4 > 3$ c) $8x - 5 \leq 6x + 9$
- b) $x - 5 < 6 - x$ d) $5x - 3 \geq 4x + 6$

a)

x	-4	-2	-1	-0,5	2	5	10
Primer miembro: $2x + 4$	-4	0	2	3	8	14	24
Segundo miembro: 3	3		3		3		
	$2x + 4 < 3$		$x + 4 = 3$		$x + 4 > 3$		

b)

x	-1	0	2	5,5	6	7	10
Primer miembro: $x - 5$	-6	-5	-3	0,5	1	2	5
Segundo miembro: $6 - x$	7	6	4	0,5	0	-1	-4
	$x - 5 < 6 - x$		$2x - 5 = 6 - x$		$2x - 5 > 6 - x$		

c)

x	-1	3	5	7	8	9	10
Primer miembro: $8x - 5$	-13	19	35	51	59	67	75
Segundo miembro: $6x + 9$	3	27	39	51	57	63	69
	$8x - 5 < 6x + 9$		$8x - 5 = 6x + 9$		$8x - 5 > 6x + 9$		

d)

x	3	5	8	9	10	11	12
Primer miembro: $5x - 3$	12	22	37	42	47	52	57
Segundo miembro: $4x + 6$	18	26	38	42	46	50	54
	$5x - 3 < 4x + 6$		$5x - 3 = 4x + 6$		$5x - 3 > 4x + 6$		

4.3 Escribe las desigualdades que resultan al operar los dos miembros de $12 > 2$ en cada apartado.

- a) Sumando 3 c) Dividiendo entre 3
- b) Multiplicando por -2 d) Restando 2
- a) $12 + 3 > 2 + 3 \Rightarrow 15 > 5$ c) $\frac{12}{3} > \frac{2}{3} \Rightarrow 4 > \frac{2}{3}$
- b) $(-2) \cdot 12 < (-2) \cdot 2 \Rightarrow -24 < -4$ d) $12 - 2 > 2 - 2 \Rightarrow 10 > 0$

4.4 Resuelve las siguientes inecuaciones aplicando las reglas de la suma y del producto.

a) $3x - 5 > 4x$

c) $4 - x \geq x - 6$

b) $3x + 6 \leq 2x + 10$

d) $2 + 6x > 2x - 3$

a) $-x > 5 \Rightarrow x < -5$

c) $-2x \geq -10 \Rightarrow x \leq 5$

b) $x \leq 4$

d) $4x > -5 \Rightarrow x > \frac{-5}{4}$

4.5 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3(2x + 2) > 3(3x + 4)$

c) $1 - 2(x + 5) \geq -3$

e) $x + \frac{1-x}{6} < 2 - \frac{2+x}{2}$

b) $\frac{5x-7}{3} < x+5$

d) $2x - 5 < 2(x+1) + x$

f) $3x - \frac{1-2x}{2} \leq 4 + x$

a) $6x + 6 > 9x + 12 \Rightarrow -3x > 6 \Rightarrow x < -2$

b) $5x - 7 < 3x + 15 \Rightarrow 2x < 22 \Rightarrow x < 11$

c) $1 - 2x - 10 \geq -3 \Rightarrow -2x \geq 6 \Rightarrow x \leq -3$

d) $2x - 5 < 2x + 2 + x \Rightarrow -x < 7 \Rightarrow x > -7$

e) $6x + 1 - x < 2 - 6 - 3x \Rightarrow 8x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{8}$

f) $6x - 1 + 2x \leq 8 + 2x \Rightarrow 6x \leq 9 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$

4.6 Encuentra gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $x - 2 > 3$

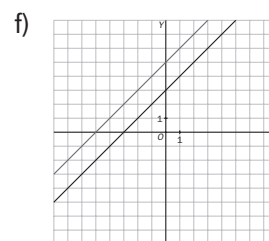
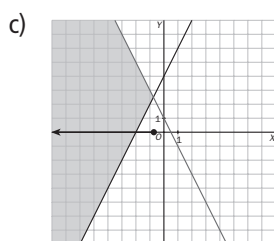
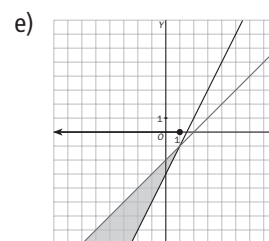
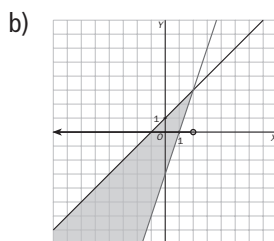
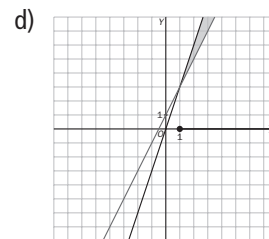
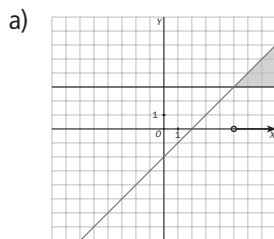
d) $2x + 1 \leq 3x$

b) $3x - 3 < x + 1$

e) $x - 2 \geq 2x - 3$

c) $1 - 2x \geq 2x + 4$

f) $5 + x < x + 3$



a) $x > 5$

d) $x \geq 1$

b) $x < 2$

e) $x \leq 1$

c) $x \leq -\frac{3}{4}$

f) \emptyset

4.7 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$

b) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

c) $4x^2 + 4x - 3 \leq 0$

d) $x^2 + 1 < 0$

e) $x(x + 1)(x - 2) > 0$

f) $x^3 - 9x \leq 0$

a) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x - 3)(x + 1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo del primer factor: $(x - 3)$	-	-	+
Signo del segundo factor: $(x + 1)$	-	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = (x - 3)(x + 1)$	+	-	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x - 6)(x - 2)$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 6)$	$(6, +\infty)$
Signo del primer factor: $(x - 6)$	-	-	+
Signo del segundo factor: $(x - 2)$	-	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = (x - 6)(x - 2)$	+	-	+

Solución: $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$

c) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
Signo del primer factor: $\left(x - \frac{1}{2}\right)$	-	-	+
Signo del segundo factor: $\left(x + \frac{3}{2}\right)$	-	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$	+	-	+

Solución: $[-1,5; 0,5]$

d) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Por tanto, $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución.

e)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo del primer factor: x	-	-	+	+
Signo del segundo factor: $(x + 1)$	-	+	+	+
Signo del tercer factor: $(x - 2)$	-	-	-	+
Signo del polinomio: $P(x) = x(x + 1)(x - 2)$	-	+	-	+

Solución: $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$

f) $x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo del primer factor: x	-	-	+	+
Signo del segundo factor: $(x - 3)$	-	-	-	+
Signo del tercer factor: $(x + 3)$	-	+	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = x(x - 3)(x + 3)$	-	+	-	+

Solución: $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$

4.8 Encuentra la solución de estas inecuaciones.

a) $\frac{1}{x+2} < 0$

c) $\frac{x+3}{x-5} > 0$

e) $\frac{x^2-1}{x^2} < 0$

b) $\frac{x}{x-2} \geq 0$

d) $\frac{x+4}{1-x} \leq 0$

f) $\frac{x-4}{x^2-3x+2} \geq 0$

a) $\frac{1}{x+2} < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, -2)$

b)

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo del numerador: x	-	+	+
Signo del denominador: $(x-2)$	-	-	+
Signo de la fracción	+	-	+

Solución: $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo del numerador: $(x+3)$	-	+	+
Signo del denominador: $(x-5)$	-	-	+
Signo de la fracción	+	-	+

Solución: $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

d)

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo del numerador: $(x+4)$	-	+	+
Signo del denominador: $(1-x)$	+	+	-
Signo de la fracción	-	+	-

Solución: $(-\infty, -4] \cup (1, +\infty)$

e) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo del primer factor del numerador: $(x-1)$	-	-	-	+
Signo del segundo factor del numerador: $(x+1)$	-	+	+	+
Signo del denominador: x^2	+	+	+	+
Signo de la fracción	+	-	-	+

Solución: $(-1, 0) \cup (0, 1)$

f) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{2}{1}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo del numerador: $(x-4)$	-	-	-	+
Signo del primer factor del denominador: $(x-1)$	-	+	+	+
Signo del segundo factor del denominador: $(x-2)$	-	-	+	+
Signo de la fracción	-	+	-	+

Solución: $(1, 2) \cup [4, +\infty)$

4.9 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 1 - x \\ 4 - 2x \geq 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 1 \geq 7 - x \\ 1 - x < 1 - 2x \end{cases}$

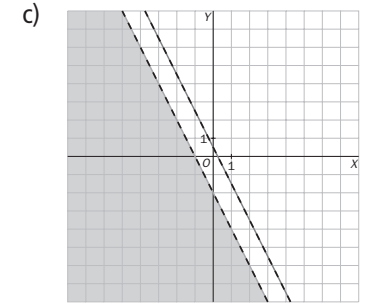
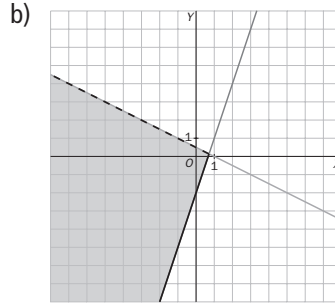
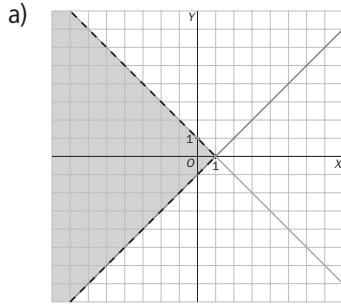
a) Solución: $[0, 2)$ b) $\begin{cases} 3x < 4 \\ -2x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, -1]$ c) $\begin{cases} 4x \geq 8 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ No tiene solución

4.10 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y < 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y < -2 \\ 4x + 2y < 1 \end{cases}$

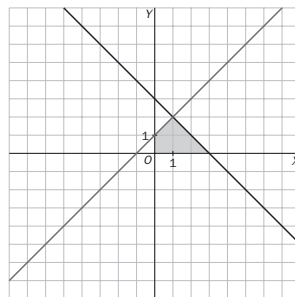


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.11 Calcula el área del recinto limitado por estas inecuaciones.

$\begin{cases} x - y > -1 \\ x + y < 3 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$

$A = \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{11}{2} = \frac{7}{2} u^2$

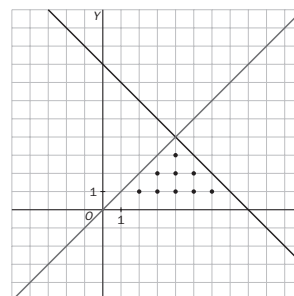


4.12 Por su cumpleaños, Adela ha recibido más llamadas de su familia que de sus amigos.

Si en total han sido menos de 8 felicitaciones, al menos una de cada tipo, ¿cuántas llamadas de familiares y amigos puede haber recibido?

x: llamadas de familiares
y: llamadas de amigos

$\begin{cases} x > y \\ x + y < 8 \\ x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$



Como el número de llamadas debe ser entero, las posibles soluciones serán:

Familiares	2	3	3	4	4	4	5	5	6
Amigos	1	1	2	1	2	3	1	2	1

Resolución de inecuaciones

4.19 Resuelve las siguientes inecuaciones utilizando las reglas de equivalencia.

a) $7x - 2(1 - 3x) \leq 2x + 3$

b) $5 > \frac{3x + 1}{2}$

c) $5x - \frac{2}{3} < 4(3x - 6) - 2x$

a) $7x - 2 + 6x \leq 2x + 3 \Rightarrow 11x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{11}$

b) $10 > 3x + 1 \Rightarrow 9 > 3x \Rightarrow x < 3$

c) $15x - 2 < 36x - 72 - 6x \Rightarrow -15x < -70 \Rightarrow x > \frac{14}{3}$

d) $2x - 3x - 3 \geq 5 - 6x \Rightarrow 5x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{5}$

e) $20x + 4 \leq -24x + 72 + 15 \Rightarrow 44x \leq 83 \Rightarrow x \leq \frac{83}{44}$

f) $4x - 3 \geq 2x + 2 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

d) $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{5}{6} - x$

e) $\frac{2(5x+1)}{3} \leq -4(x-3) + \frac{5}{2}$

f) $\frac{4x-3}{2} \geq x+1$

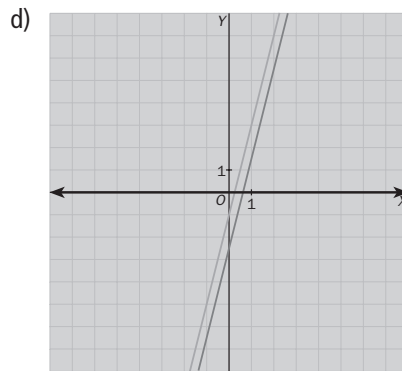
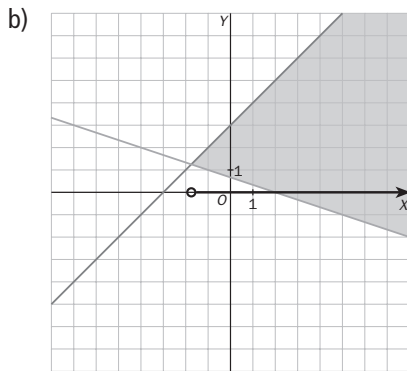
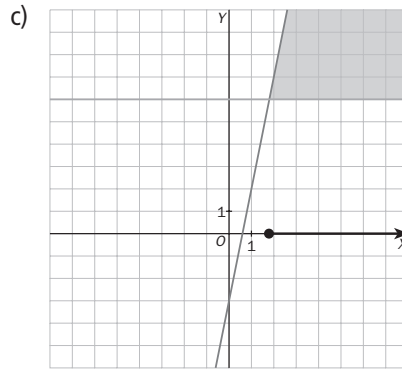
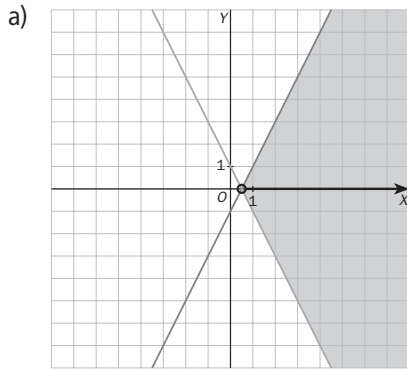
4.20 Encuentra gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $-3x + 1 < 2x - 1$

b) $\frac{-x+2}{3} < x+3$

c) $5x - 3 \geq 6$

d) $4x - 1 \geq \frac{8x-5}{2}$



a) $x > \frac{2}{5}$

b) $x > \frac{-7}{4}$

c) $x \geq \frac{9}{5}$

d) **R**

4.21 Resuelve, por el método de factorización, las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 2x - 4 \leq 0$

c) $(3x - 1)(-5x + 2) \geq 0$

b) $-10x^2 + 17x - 3 \leq 0$

d) $-7(4x + 1)(-x + 2) < 0$

a) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$

	$(-\infty, 1 - \sqrt{5})$	$(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$	$(1 + \sqrt{5}, +\infty)$
Signo del primer factor: $(x - 1 - \sqrt{5})$	-	-	+
Signo del segundo factor: $(x - 1 + \sqrt{5})$	-	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$	+	-	+

Solución: $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$

b) $x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 120}}{-20} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = -\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

	$\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
Signo del primer factor: $-\left(x - \frac{1}{5}\right)$	+	-	-
Signo del segundo factor: $\left(x - \frac{3}{2}\right)$	-	-	+
Signo del polinomio: $P(x) = -\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$	-	+	-

Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

c)

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
Signo del primer factor: $(3x - 1)$	-	+	+
Signo del segundo factor: $(-5x + 2)$	+	+	-
Signo del polinomio: $P(x) = (3x - 1)(-5x + 2)$	-	+	-

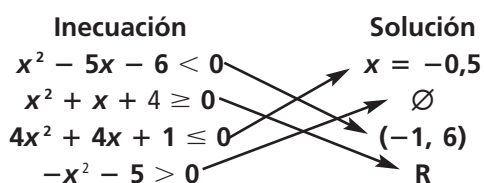
Solución: $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$

d)

	$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo del primer factor: $-7(4x + 1)$	+	-	-
Signo del segundo factor: $(-x + 2)$	+	+	-
Signo del polinomio: $P(x) = -7(4x + 1)(-x + 2)$	+	-	+

Solución: $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$

4.22 Relaciona en tu cuaderno cada inecuación con su solución.



4.23 Utiliza el método de factorización para resolver las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x+5}{x+2} \leq 0$

c) $\frac{3-x}{x+2} < 0$

e) $-10x^3 + 52x^2 - 70x + 12 \geq 0$

b) $\frac{x+3}{x^2} > 0$

d) $-5x^2(x-2)(x+1) \leq 0$

f) $\frac{(x-2)(x+5)}{4x-6} \geq 0$

a)

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, +\infty)$
Signo del numerador: $(x+5)$	-	+	+
Signo del denominador: $(x+2)$	-	-	+
Signo de la fracción	+	-	+

Solución: $[-5, -2)$

b)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo del numerador: $(x+3)$	-	+	+
Signo del denominador: x^2	+	+	+
Signo de la fracción	-	+	+

Solución: $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$

c)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo del numerador: $(3-x)$	+	+	-
Signo del denominador: $(x+2)$	-	+	+
Signo de la fracción	-	+	-

Solución: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

d)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo del primer factor: $-5x^2$	-	-	-	-
Signo del segundo factor: $(x-2)$	-	-	-	+
Signo del tercer factor: $(x+1)$	-	+	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = (3x-1)(-5x+2)$	-	+	+	-

Solución: $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

e) $-10x^3 + 52x^2 - 70x + 12 = (x-2)(-10x^2 + 32x - 6) = 2(x-2)(-5x^2 + 16x - 3) = -10(x-2)(x-3)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

$$2 \begin{array}{c|ccc} -10 & 52 & -70 & 12 \\ & -20 & 64 & -12 \\ -10 & 32 & -6 & 0 \end{array} \quad x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 60}}{-10} = \left\langle \frac{1}{5}, 3 \right\rangle$$

	$(-\infty, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo del primer factor: $-2(x-2)$	+	+	-	-
Signo del segundo factor: $(x-3)$	-	-	-	+
Signo del tercer factor: $\left(x - \frac{1}{5}\right)$	-	+	+	+
Signo del polinomio: $P(x) = -2(x-2)(x-3)\left(x - \frac{1}{5}\right)$	+	-	+	-

Solución: $(-\infty; 0,2] \cup [2, 3]$

f)

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo del primer factor del numerador: $(x - 2)$	-	-	-	+
Signo del segundo factor del numerador: $(x + 5)$	-	+	+	+
Signo del denominador: $(4x - 6)$	-	-	+	+
Signo de la fracción	-	+	-	+

Solución: $[-5, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$

Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas

4.24 Dado el sistema $\begin{cases} y > -3x + 3 \\ y \leq -x + 6 \end{cases}$ y los puntos:

A (3, 2)

C (-2; 8,5)

E (0, 0)

B (5, 3)

D (4, 2)

F (-1,5; 7,5)

a) Indica cuáles de ellos son solución del sistema.

b) ¿Cuáles son solución solo de la primera inecuación? ¿Cuáles solo de la segunda?

c) ¿Cuáles no son solución de ninguna de ellas?


a) A, D

b) Soluciones de la primera ecuación: A, B, D

Soluciones de la segunda ecuación: A, D, E, F

c) C

4.25 Relaciona en tu cuaderno cada sistema con su solución.

Sistema	Solución
$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 > 5 \end{cases}$	$-2 \leq x < -1$
$\begin{cases} 3x + 4 < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$	$(2, +\infty)$
$\begin{cases} -4x + 3 \leq -1 \\ 5x - 2 < 6 \end{cases}$	

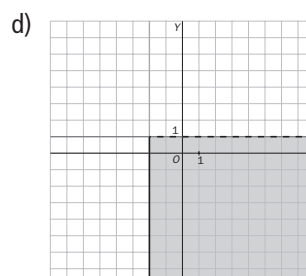
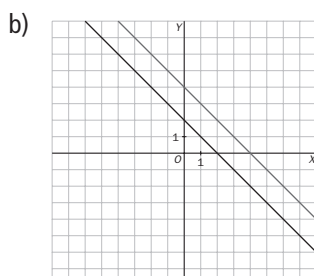
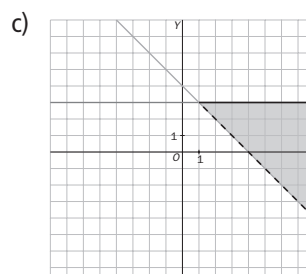
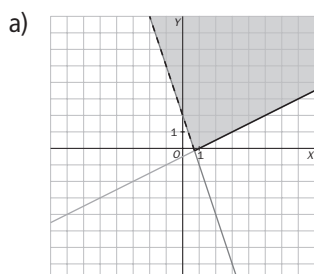
4.26 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x + 2y \leq 1 \\ 3x + y > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + y < 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leq 3 \\ x + y > 4 \end{cases}$

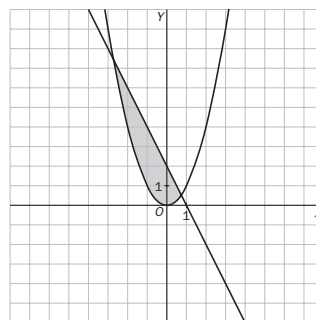
d) $\begin{cases} x \geq -2 \\ y < 1 \end{cases}$



4.27 Sombrea sobre unos ejes de coordenadas el recinto encerrado entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -2x + 2$.

Escribe el sistema de inecuaciones que tiene como solución dicho recinto.

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -2x + 2 \end{cases}$$



4.28 Escribe un sistema que tenga como solución los siguientes elementos geométricos.

- a) El cuadrado de lado 2 centrado en el origen.
- b) El segmento de extremos -3 (incluido) y 7 (excluido).
- c) El tercer cuadrante del plano.
- d) La semirrecta con origen en 5 , inclusive, en adelante.

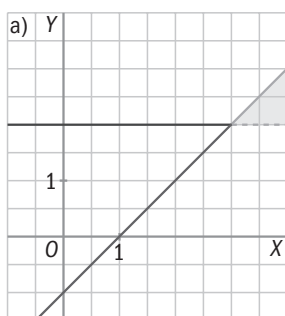
a) $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 7 \end{cases}$

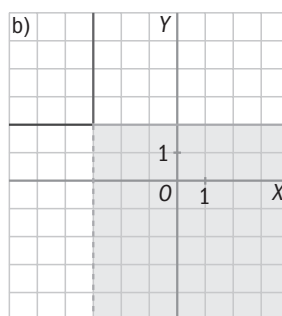
c) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 5 \\ x > 0 \end{cases}$

4.29 Investiga qué sistemas de inecuaciones tienen como solución los siguientes segmentos o regiones del plano.



$$\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq x - 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

4.30 Relaciona en tu cuaderno los elementos equivalentes de las tres columnas.

Desigualdad	Intervalo	Segmento o semirrecta
$x \leq 5$	$(7, +\infty)$	
$-1 < x \leq 1,5$	$(-\infty, 5]$	
$x > 7$	$(-1, \frac{3}{2}]$	

4.31 Indica razonadamente si el punto $(2, 4)$ es solución del siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 1 < y + 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 1 < 4 + 2 \\ 4 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \text{El punto cumple las dos desigualdades; por tanto, es solución del sistema.}$$

4.32 Señala si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) $17 < -12$ es una desigualdad incorrecta.
- b) Una inecuación o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas soluciones.
- c) La solución de $x + 5 \leq 3$ es una semirrecta.
- d) La solución de $y + 3 \leq x + 1$ es un semiplano.

a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera d) Verdadera

4.33 Encuentra la solución de esta inecuación: $(5x - 2)^2 \leq 0$

Un número al cuadrado nunca puede ser negativo; por tanto: $(5x - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

4.34 Indica si son ciertas las siguientes igualdades entre intervalos.

- a) $(-\infty, 5] \cap (2, +\infty) = [2, 5]$
- b) $(-\infty, 4] \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 4]$

a) Falsa, ya que 2 no está incluido. b) Verdadera

4.35 ¿Es cierto que $12 \leq 12$?

Sí, ya que se cumple la igualdad.

4.36 Indica qué operación de equivalencia transforma la desigualdad $13 \leq -2$ en $8 \leq -7$.

Restar 5: $13 - 5 \leq -2 - 5$

4.37 ¿Qué puedes decir de estas inecuaciones?

- a) $3x - 4 \leq 2$
- b) $7x - 2 \leq 12$

Tienen la misma solución.

4.38 ¿En cuántos semiplanos divide al plano la recta $y = 3x - 5$? Nómbralos en forma de inecuación.

En dos: $y \geq 3x - 5$ $y \leq 3x - 5$

4.39 Calcula la solución de la siguiente inecuación según los valores del parámetro a sabiendo que $a \neq 0$:
 $a(x - 2)^2 < 0$

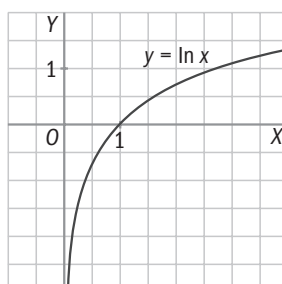
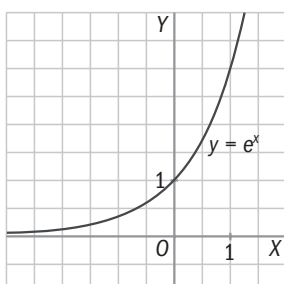
Si $a > 0$, la inecuación no tiene ninguna solución.

Si $a < 0$, la solución es todo \mathbf{R} .

4.40 Resuelve las siguientes inecuaciones.

- a) $e^x \geq 0$
- b) $\ln x \leq 0$

Ten a la vista las gráficas de estas funciones.



a) $x \in \mathbf{R}$

b) $0 < x \leq 1$ ó $(0, 1]$

- 4.41 Un carpintero va a colocar un rodapié en una habitación rectangular de 6 metros de ancho y con un perímetro menor que 30 metros.

¿Cuánto puede valer la longitud del cuarto?

$$\text{Long} < \frac{30 - 12}{2} \Rightarrow \text{Long} \in (0,9)$$

- 4.42 Marcos quiere encargar a un cristallero un espejo circular, aunque no tiene claro qué tamaño le conviene. Lo que sabe es que el radio puede variar entre 20 y 25 centímetros.

¿Entre qué valores oscilaría el área del cristal? ¿Y su perímetro?

$$20 \leq r \leq 25 \Rightarrow 400\pi \leq A \leq 625\pi \quad \text{y} \quad 40\pi \leq p \leq 50\pi$$

- 4.43 Dos compañías telefónicas ofrecen estas ofertas.



a) ¿Cuántos minutos debe el cliente llamar a móviles en un mes para que le resulte más económica la compañía B?

b) ¿Cuál es el importe de la factura en este caso?

a) $40 + 0,3x > 60 + 0,2x \Rightarrow 0,1x > 20 \Rightarrow x > 200$ minutos

b) $\text{Factura} > 60 + 0,2 \cdot 200 \Rightarrow \text{Factura} > 100$ €

- 4.44 En una tienda de comercio justo hay dos tipos de marcas de café: una de Ecuador y otra de Colombia. En el que procede de Ecuador, cada paquete cuesta 1,30 euros, y en el de Colombia, 1,65 euros.

Averigua el número de paquetes de cada tipo que puedo adquirir si llevo 25 euros en el bolsillo y quiero comprar el doble de paquetes del elaborado en Colombia que del procedente de Ecuador.

$$2 \cdot 1,65x + 1,30x \leq 25 \Rightarrow 4,6x \leq 25 \Rightarrow x \leq 5,4$$

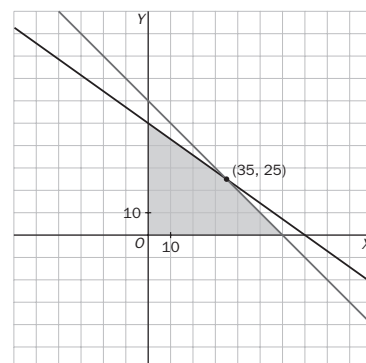
Como máximo puedo adquirir 5 paquetes procedentes de Ecuador y 10 de Colombia.

- 4.45 Dos jóvenes informáticos desean abrir una pequeña empresa de venta de ordenadores. Dos proveedores les venden aparatos de 500 y 700 euros. Por otra parte, disponen de 35 000 euros para invertir y de un pequeño almacén donde solo caben 60 equipos informáticos.

¿Cuántos ordenadores, como máximo, pueden comprar para optimizar el espacio y ajustarlo a su presupuesto?

$$\begin{cases} 500x + 700y \leq 35\,000 \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Como máximo pueden comprar 60 ordenadores: 35 del primer tipo y 25 del segundo.



- 4.46 La tirada de una revista mensual tiene unos costes de edición de 30 000 euros, a los que hay que sumar 1,50 euros de gastos de distribución por cada revista publicada.

Si cada ejemplar se vende a 3,50 euros y se obtienen unos ingresos de 12 000 euros por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a obtener beneficios?

$$30\,000 + 1,50x < 3,5x + 12\,000 \Rightarrow 18\,000 < 2x \Rightarrow x > 9\,000$$

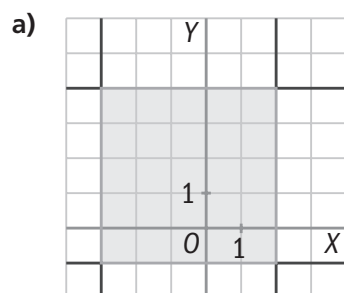
A partir de 9000 ejemplares empezamos a obtener beneficios.

4.47 Si el área de un cuadrado es menor o igual que 64 centímetros cuadrados, calcula los posibles valores de su diagonal.

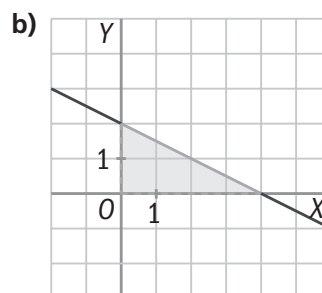
$$x^2 \leq 64 \Rightarrow x \leq 8 \text{ (no sirven valores negativos)}$$

$$d = \sqrt{2} x \Rightarrow d \leq 8\sqrt{2}$$

4.48 Escribe los sistemas de inecuaciones cuyas soluciones corresponden a las siguientes zonas sombreadas.

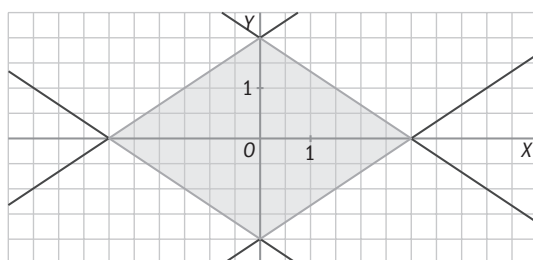


$$\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq x - 1 \end{cases}$$



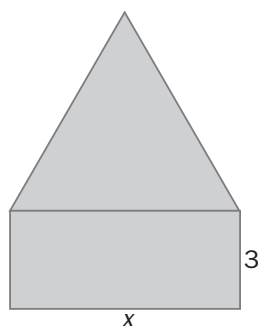
$$\begin{cases} y \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

4.49 Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución corresponde a este recinto.



$$\begin{cases} y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \\ y \geq -\frac{2}{3}x - 2 \\ y \leq \frac{2}{3}x + 2 \\ y \geq \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$$

4.50 Indica para qué valores de x el área del triángulo equilátero de la figura es mayor que la del rectángulo.



$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$A_{\text{rectángulo}} = 3x$$

$$\frac{\sqrt{3}x^2}{4} > 3x \text{ como } x > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{4} > 3 \Rightarrow x > 4\sqrt{3}$$

4.51 Considera el sistema $\begin{cases} 3x \leq -6 \\ ax > b \end{cases}$

Averigua las condiciones que deben cumplir a y b para que su solución sea:

a) \emptyset

c) -2

b) $(-4, -2]$

d) $(-\infty, -3)$

a) Si $a > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > -2$

Si $a < 0$ no se puede.

Si $a = 0 \Rightarrow b > 0$

b) Si $a > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > -4$

Si $a < 0$ no se puede.

Si $a = 0$ no se puede.

c) No se puede.

d) Si $a > 0$ no se puede

Si $a < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < -3$

Si $a = 0$ no se puede.

4.52 Calcula los valores de m para que se cumplan estas condiciones.

a) Que $mx^2 - mx + 1 \leq 0$ tenga una sola solución.

b) Que $2mx^2 + (4m + 1)x + 2m - 3 = 0$ tenga dos soluciones.

a) $m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $m = 4$

b) $(4m + 1)^2 - 4 \cdot 2m(2m - 3) > 0 \Rightarrow 16m^2 + 8m + 1 - 16m^2 + 24m > 0 \Rightarrow 32m + 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{-1}{32}$

REFUERZO

Concepto de desigualdad e inecuación. Reglas de equivalencia

4.53 Transforma la desigualdad $-12 \leq 3$ aplicando en ambos miembros las operaciones que se indican en cada caso.

a) Suma -2 .

b) Resta 5 .

c) Multiplica por -1 .

d) Divide entre -3 .

a) $-12 - 2 \leq 3 - 2 \Rightarrow -14 \leq 1$

c) $(-12) \cdot (-1) \geq 3 \cdot (-1) \Rightarrow 12 \geq -3$

b) $-12 - 5 \leq 3 - 5 \Rightarrow -17 \leq -2$

d) $(-12) : (-3) \geq 3 : (-3) \Rightarrow 4 \geq -1$

4.54 Escribe una inecuación cuya solución se corresponda con la dada en cada caso.

a) $[-3, +\infty)$

c) $(-\infty, 2)$

b) \emptyset

d) $\{3\}$

a) $x + 2 \geq -1$

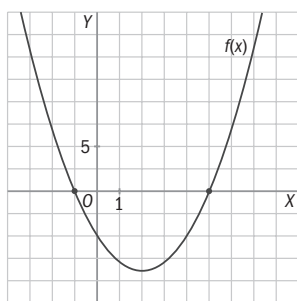
c) $2x - 7 < x - 5$

b) $x^2 < -5$

d) $(x - 3)^2 \leq 0$

Resolución de inecuaciones

4.55 Observa la gráfica de la función $f(x) = (x - 5)(x + 1)$ y resuelve las inecuaciones siguientes.



a) $f(x) \geq 0$

b) $f(x) < 0$

a) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

b) $(-1, 5)$

4.56 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 3 \geq 6 - (2 - 4x)$

d) $5(-x + 3)(2x + 5) \geq 0$

b) $-5(-2x + 1) - \frac{3}{4} \leq \frac{x - 5}{2}$

e) $\frac{x + 1}{x - 5} > 0$

c) $x^2 - 9x + 14 \leq 0$

f) $\frac{x + 4}{x - 3} \leq 0$

a) $3x - 3 \geq 6 - 2 + 4x \Rightarrow -x \geq 7 \Rightarrow x \leq -7$

b) $40x - 20 - 3 \leq 2x - 10 \Rightarrow 38x \leq 13 \Rightarrow x \leq \frac{13}{38}$

c)

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle$		$(-\infty, 2)$	$(2, 7)$	$(7, +\infty)$
	signo de $(x - 2)$	-	+	+
	signo de $(x - 7)$	-	-	+
	signo de $P(x)$	+	-	+

Solución: $[2, 7]$

d)

	$(-\infty, -2,5)$	$(-2,5; 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $(-x + 3)$	+	+	-
Signo de $(2x + 5)$	-	+	+
Signo de $(-x + 3)(2x + 5)$	-	+	-

Solución: $[-2,5; 3]$

e)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo de $(x + 1)$	-	+	+
Signo de $(x - 5)$	-	-	+
Signo de la fracción	+	-	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

f)

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x + 4)$	-	+	+
$(x - 3)$	-	-	+
Signo de la fracción	+	-	+

Solución: $[-4, 3)$

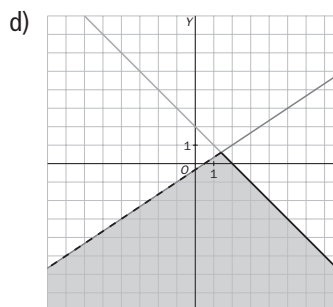
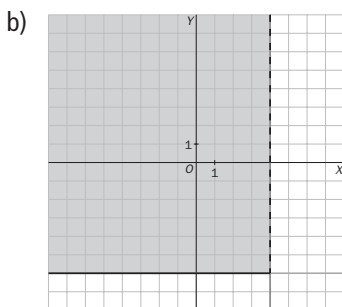
Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas

4.57 Encuentra la solución de los siguientes sistemas.

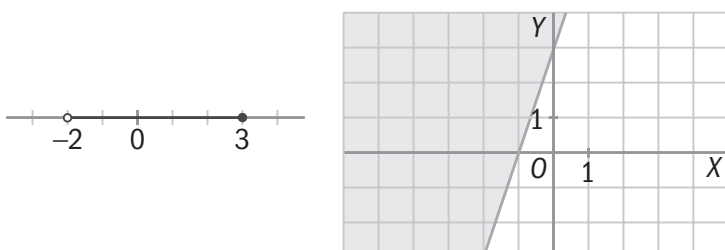
a) $\begin{cases} 2x - 5 \leq 1 \\ x + 3 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq -6 \\ x < 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 1 > 10 \\ x - 2 \leq 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y > 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x \leq 3 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow (-1, 3]$

c) $\begin{cases} x > 9 \\ x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$



4.58 Investiga qué sistemas de inecuaciones tienen como solución los siguientes segmentos o regiones del plano.



$$\begin{cases} x > -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$$y \geq 3x + 3$$

4.59 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq -2$

b) $4^{-x+0.5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$

c) $5^x > 3125$

a) Se supone que estamos tomando la raíz positiva; por tanto, siempre será mayor que -2 , solo nos falta saber dónde existe la raíz.

Resolvemos la ecuación: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$.

El radicando no toma valores negativos. La solución será \mathbf{R} .

b) $2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$ cambio $u = 2^{-x} \Rightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0 \Rightarrow$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \begin{cases} 4 \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2 \\ -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} -\infty & -2 & +\infty \\ \text{no} & \text{sí} & \end{array} \Rightarrow \text{Solución: } (-2, +\infty)$$

c) $5x > 5^5 \Rightarrow x > 5$ Solución: $(5, +\infty)$

4.60 Sean a y b dos números cualesquiera, positivos o negativos. ¿Son ciertas estas afirmaciones?

a) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

b) $a < b \Rightarrow |a| < |b|$

c) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

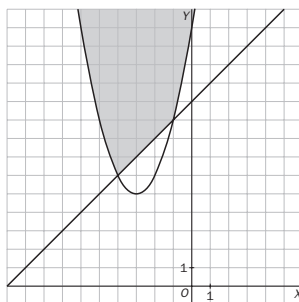
a) Falsa.

b) Falsa.

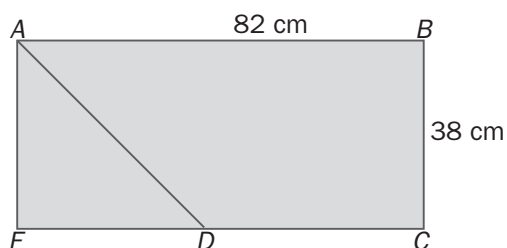
c) Falsa.

4.61 Resuelve el siguiente sistema gráficamente dibujando las gráficas de las funciones que surgen de cada inecuación.

$$\begin{cases} 2x + 10 \leq 2y - 10 \\ 4y - 6 \geq x^2 + 6x + 3y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \leq -10 \\ y \geq x^2 + 6x + 14 \end{cases}$$



4.62 Calcula para qué valores de x el área del triángulo ADE es menor que la del trapecio $ABCD$.



No puede ser nunca mayor.

4.63 Una inecuación en la que aparece un valor absoluto da lugar en realidad a dos inecuaciones.

$$|x - a| \leq r \Rightarrow -r \leq x - a \leq r$$

Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $|3x - 1| \leq 5$

b) $|4x + 3| > 2$

a) $-5 \leq 3x - 1 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow$ Solución: $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$

b) $4x + 3 > 2 \Rightarrow 4x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{4}$

$4x + 3 < -2 \Rightarrow 4x < -5 \Rightarrow x < -\frac{5}{4}$

Solución: $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

4.64 La inecuación $\frac{-3}{x+4} < -5$ da lugar a dos inecuaciones, según que el denominador sea mayor o menor que 0. Encuentra todas sus soluciones.

Si $x + 4 < 0$, $x < -4 \Rightarrow -3 > -5x - 20 \Rightarrow 5x > -17 \Rightarrow x > -\frac{17}{5} = -3,4 \Rightarrow$ Solución: \emptyset

Si $x + 4 > 0$, $x > -4 \Rightarrow -3 < -5x - 20 \Rightarrow 5x < -17 \Rightarrow x < -\frac{17}{5} = -3,4 \Rightarrow$ Solución: $(-4; -3,4)$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

4.65 Las kilocalorías

La tabla muestra la capacidad energética media (en kilocalorías por gramo) de algunos nutrientes fundamentales.

Glúcidos	Proteínas	Grasas
4	4	9

Un alimento tiene las siguientes características en su composición.

- Posee el doble de gramos de grasa que de glúcidos.
- La masa de las proteínas es veinte veces la masa de los glúcidos.
- En 100 gramos de ese alimento hay, en total, 20,7 gramos de glúcidos, proteínas y grasas.

a) Escribe una expresión que determine el número de kilocalorías que poseen x gramos de dicho alimento.

b) Si se han consumido entre 150 y 250 gramos del mencionado alimento, ¿entre qué valores está comprendido el número de kilocalorías consumidas?

En 100 gramos de ese alimento hay c gramos de hidratos, $20c$ de proteínas y $2c$ de grasa. Por tanto:

$$c + 20c + 2c = 23c = 20,7 \Rightarrow c = \frac{20,7}{23} = 0,9$$

En 100 gramos de ese alimento hay 0,9 gramos de hidratos, 18 de proteínas y 1,8 de grasa.

En 1 gramo de ese alimento hay 0,009 gramos de hidratos, 0,18 de proteínas y 0,018 de grasa.

En x gramos de ese alimento hay $0,009x$ gramos de hidratos, $0,18x$ de proteínas y $0,018x$ de grasa.

a) Los x gramos de ese alimento aportan $0,009 \cdot 4x + 0,18 \cdot 4x + 0,018 \cdot 9x = 0,918x$ kilocalorías.

b) Si $150 \leq x \leq 250 \Rightarrow 150 \cdot 0,918 \leq 0,918x \leq 250 \cdot 0,918 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 137,7 \leq 0,918x \leq 229,5 \Rightarrow 137,7 \leq \text{kilocalorías} \leq 229,5$$

4.66 Los pantalones vaqueros

Se quiere confeccionar dos tipos de pantalones vaqueros. La diferencia entre ambos es la cantidad de algodón cardado y de algodón peinado que se utiliza. La tabla siguiente muestra las composiciones de cada tipo de pantalón.

	Unidades de algodón cardado	Unidades de algodón peinado
Tipo I (Extra)	1	5
Tipo II (Medio)	3	3

Para la confección de la totalidad de los pantalones se dispone de 40 unidades de algodón cardado y de 100 unidades de algodón peinado.

- a) ¿Es posible confeccionar 15 pantalones del tipo I y 10 del tipo II?
 b) Dibuja en unos ejes de coordenadas la zona que incluya las distintas posibilidades de confeccionar x pantalones del tipo I e y pantalones del tipo II.

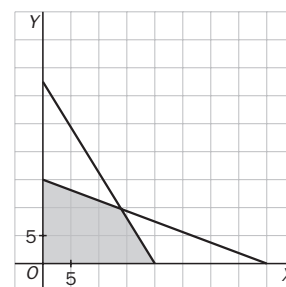
a) 15 pantalones de tipo I y 10 de tipo II precisan $1 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 45$ unidades de algodón cardado. Como solo se cuenta con 40, no podrán ser confeccionados.

b) Si se confeccionan x pantalones de tipo I e y pantalones de tipo II, se deberá verificar que

$$\begin{cases} x + 3y \leq 40 \\ 5x + 3y \leq 100 \end{cases}$$

La zona sombreada incluye las posibilidades de confección.

Se observa que el punto (15, 10) queda fuera de dicha zona.



AUTOEVALUACIÓN

4.A1 Indica cuál de los siguientes intervalos es la solución de la inecuación $-3x + 1 \leq -2$.

- a) $[1, +\infty)$ b) $(-1, +\infty)$ c) $(-\infty, 1]$ d) $(-\infty, -1]$
 $[1, +\infty)$

4.A2 Considera estas inecuaciones.

- a) $x - 7 \leq 5$ b) $x + 1 \leq 7$ c) $2 - x \geq -10$ d) $3x - 6 \leq -30$

Señala cuáles son equivalentes a $x - 2 \leq 10$. En los casos afirmativos, indica la transformación que permite pasar de una a otra inecuación.

- a) Inecuaciones a y c
 b) a) $x - 7 + 5 \leq 5 + 5$ c) $(2 - x)(-1) \leq (-10)(-1)$

4.A3 Completa en tu cuaderno esta tabla, que presenta conjuntos de números de tres formas equivalentes: gráficamente, como desigualdad y como intervalo.

	$-2 < x \leq 3$	$(-2, 3]$
	$x \geq 2$	$[2, +\infty)$
	$x < -4$	$(-\infty, -4)$

4.A4 Elige la solución correcta de esta inecuación: $-2x^2 + 2x + 12 \leq 0$

a) $[-2, 3]$

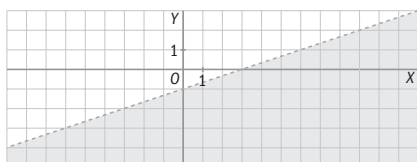
b) $(-2, 3]$

c) $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

d) $(-\infty, -2] \cup (3, +\infty]$

La b) $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

4.A5 Escribe la inecuación cuya solución es el siguiente semiplano.



$$y < \frac{x}{3} - 1$$

4.A6 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x + 1 \leq 3 \\ 3x > -1 \end{cases}$

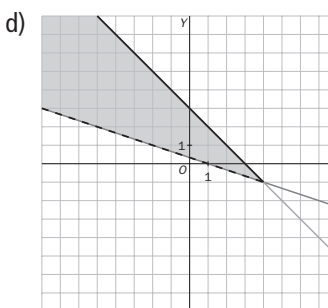
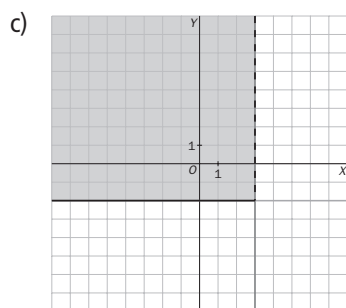
b) $\begin{cases} x + 2 > 6 \\ x - 2 \leq 2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x + 3y > 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, 2\right]$

b) $\begin{cases} x > 4 \\ -2 \leq x \end{cases} \Rightarrow (4, +\infty)$



MURAL DE MATEMÁTICAS

MATE TIEMPOS

La edad de mi abuela

Mi abuela dio a luz a mi padre con menos de 20 años, yo nací cuando mi padre tenía más de 25 años. Si mi padre tiene ahora menos de 45 años y yo curso 4.º de ESO, ¿cuántos años podría tener mi padre cuando yo nací? ¿Qué edad puede tener ahora mi abuela?

Si está en 4.º de ESO puede tener entre 15 y 18 años. Vamos a ver que edad puede tener el padre, consideramos todas las opciones:

Edad hijo	Padre							
	Al nacer el hijo	Edad actual	Al nacer el hijo	Edad actual	Al nacer el hijo	Edad actual	Al nacer el hijo	Edad actual
15	26	41	27	42	28	43	29	44
16	26	42	27	43	28	44		
17	26	43	27	44				
18	26	44						

Luego cuando nació, su padre tendría entre 26 y 29 años.

Su abuela pudo dar a luz a su padre entre los 15 y 19 años. Presentaremos la información en una tabla:

Edad abuela al dar a luz	Padre		Abuela
	Edad actual	Al nacer el hijo	
Mínima: 15	$26 + 15 = 41$	26	$15 + 41 = 56$
Máxima: 19	$29 + 15 = 44$	29	$19 + 44 = 63$

Por lo tanto la edad de la abuela puede estar comprendida entre 56 y 63 años.