

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

1. Halla dos números que sumados den 20 y cuyo producto sea máximo.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos p al producto de los dos números, esto es, $p = xy$ [*]

Como $x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$ y sustituyendo en [*] resulta:

$$p = x(20 - x) = 20x - x^2$$

Vamos a calcular el (o los) máximo(s) de la función $p(x)$:

$$p'(x) = 20 - 2x$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

$$p''(x) = -2$$

$$p''(10) < 0 \Rightarrow x = 10 \text{ es un máximo}$$

Por tanto, los números buscados son:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 - 10 = 10 \end{cases}$$

2. Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x^2 y \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p = x^2 y$. Como $x + y = 40$ se tiene que $y = 40 - x$ y por tanto:

$$p = x^2(40 - x) = 40x^2 - x^3$$

Vamos a maximizar la función $p(x)$:

$$p'(x) = 80x - 3x^2$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 80x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(80 - 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 80 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{80}{3} \end{cases}$$

$$p''(x) = 80 - 6x$$

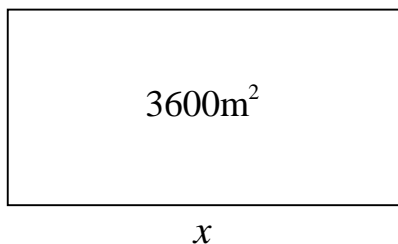
$$p''(0) = 80 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un mínimo (no nos interesa)}$$

$$p''\left(\frac{80}{3}\right) = -80 < 0 \Rightarrow x = \frac{80}{3} \text{ es un máximo}$$

Los números buscados son:

$$\begin{cases} x = \frac{80}{3} \\ y = 40 - \frac{80}{3} = \frac{40}{3} \end{cases}$$

3. Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m² de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.



Por la fórmula del área del rectángulo se tiene:

$$xy = 3600$$

Por otro lado, la superficie que tenemos que vallar es $2x + 2y$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 3600 \\ 2x + 2y \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 3600 \Rightarrow y = \frac{3600}{x}$

Llamando $f = 2x + 2y$ y sustituyendo $y = \frac{3600}{x}$ obtenemos:

$$f(x) = 2x + 2 \frac{3600}{x} = \frac{2x^2 + 7200}{x}$$

Vamos a minimizar f :

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

$$f''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

$$f''(-60) < 0 \Rightarrow x = -60 \text{ es un máximo (no nos interesa)}$$

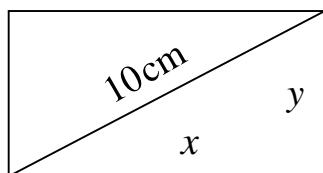
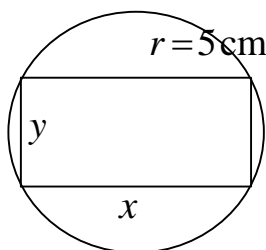
$$f''(60) > 0 \Rightarrow x = 60 \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, las dimensiones del campo son:

$$\begin{cases} x = 60 \text{ m} \\ y = \frac{3600}{60} = 60 \text{ m} \end{cases}$$

(es decir, se trata de un cuadrado)

4. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.



$A = xy$ máxima

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

de donde

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

La función a maximizar es: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{x^2(100 - x^2)} = \sqrt{100x^2 - x^4} = (100x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(100x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(200x - 4x^3) = \frac{200x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(200 - 4x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$$

El único posible extremo que nos interesa es $x = \sqrt{50}$

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{100 - x^2} - (100 - 2x^2) \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}}{(\sqrt{100 - x^2})^2} = \frac{-4x(\sqrt{100 - x^2})^2 + (100 - 2x^2)x}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \frac{-300x + 2x^3}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f''(\sqrt{50}) < 0 \Rightarrow x = \sqrt{50} \text{ es un máximo}$$

Calculamos el valor de y :

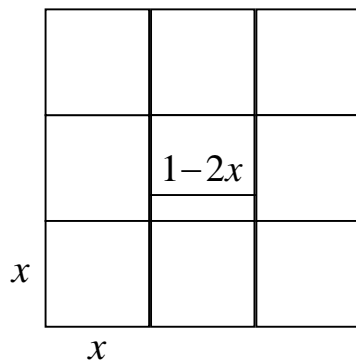
$$y = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima son:

$$\begin{cases} x = \sqrt{50} \text{ cm} \\ y = \sqrt{50} \text{ cm} \end{cases}$$

esto es, se trata de un cuadrado.

5.- Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible.



Teniendo en cuenta el dibujo, tenemos que maximizar la función

$$v(x) = (1 - 2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

Calculamos las derivadas:

$$v'(x) = 12x^2 - 8x + 1$$

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1}}{2 \cdot 12}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24} = \begin{cases} \frac{8+4}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \\ \frac{8-4}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$v''(x) = 24x - 8$$

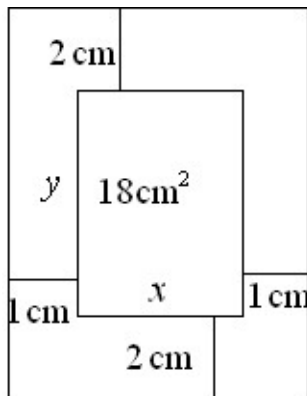
$$v''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 8 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ es un mínimo (no nos interesa)}$$

$$v''\left(\frac{1}{6}\right) = 4 - 8 < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \text{ es un máximo}$$

Por tanto, como $1 - 2x = 1 - 2 \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ las dimensiones de la caja son:

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \text{ (m)}$$

6.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm . ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo?



Teniendo en cuenta el dibujo, la función a minimizar es:

$$s = 2x + 2x + 2 + 2 + 2 + 2 + 18 + y + y = 4x + 2y + 26$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la fórmula del área de un rectángulo, se tiene que:

$$xy = 18$$

Así, tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} xy = 18 \\ 4x + 2y + 26 \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$, y por tanto, sustituyendo en s

tenemos:

$$s = 4x + 2 \frac{18}{x} + 26 = \frac{4x^2 + 36 + 26x}{x} = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x} = s(x)$$

Vamos a minimizar $s(x)$:

$$s'(x) = \frac{(8x + 26)x - (4x^2 + 26x + 36) \cdot 1}{x^2} = \frac{8x^2 + 26x - 4x^2 - 26x - 36}{x^2} = \frac{4x^2 - 36}{x^2}$$

$$s'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = 3$$

$$s''(x) = \frac{8x \cdot x^2 - (4x^2 - 36)2x}{x^4} = \frac{8x^3 - 8x^3 + 72x}{x^4} = \frac{72}{x^3}$$

$$s''(3) > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es un mínimo}$$

Así las dimensiones de la zona que contiene el texto impreso son:

$$\begin{cases} x = 3 \text{ cm} \\ y = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

y las dimensiones de la hoja de papel son: $5 \times 10 \text{ cm}$.

7.- Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger $50\,000 \text{ kg}$, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg . Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg , pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg . ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

Sea x = número de días que espera el agricultor.

Recoge una cosecha de $50000 - 800x$ (kg), que vende al precio de $20 + 3x$ (cent./kg).

La ganancia que obtiene es:

$$g(x) = (50000 - 800x)(20 + 3x)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$g'(x) = -800(20 + 3x) + (50000 - 800x) \cdot 3 = -16000 - 2400x + 150000 - 2400x = -4800x + 134000$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4800x + 134000 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{134000}{4800} = \frac{335}{12}$$

$$g''(x) = -4800$$

$$g''\left(\frac{335}{12}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{335}{12} \text{ es un máximo}$$

Por tanto, el agricultor deberá esperar $\frac{335}{12} \approx 27,917 \approx 28$ días para que su ganancia sea máxima.

8.- Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7,5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.

Sea x el precio de cada bolígrafo.

El número de bolígrafos vendidos al día es $n = 1000 - 100x$, y en cada bolígrafo obtiene un beneficio igual a $x - 7,5$.

El beneficio total es:

$$b(x) = (1000 - 100x)(x - 7,5)$$

que es la función que tenemos que maximizar¹:

$$b'(x) = -100(x - 7,5) + (2000 - 100x) = -100x + 750 + 2000 - 100x = -200x + 2750$$

$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 2750 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2750}{200} = 13,75$$

$$b''(x) = -200$$

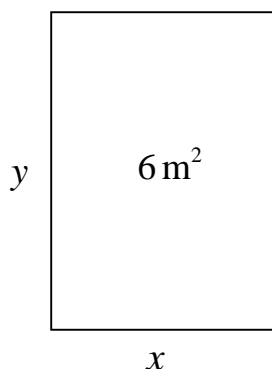
$$b''(13,75) < 0 \Rightarrow x = 13,75 \text{ es un máximo para } b(x)$$

Por tanto, el precio del bolígrafo para que el beneficio sea máximo es de **13,75 céntimos**.

9.- Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) Determinar el coste del marco.



El problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ M \equiv 2x \cdot 20 + 2y \cdot 30 = 40x + 60y \end{cases}$$

Como $xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$ y sustituyendo en la expresión de M :

$$M = 40x + 60 \frac{6}{x} = \frac{40x^2 + 360}{x} = M(x)$$

¹ Esta función es una parábola y por tanto tiene su extremo en el vértice.

Calculamos $M'(x)$ e igualamos a cero:

$$M'(x) = \frac{80x \cdot x - (40x^2 + 360) \cdot 1}{x^2} = \frac{80x^2 - 40x^2 - 360}{x^2} = \frac{40x^2 - 360}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{360}{40} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Comprobamos que la solución positiva que es la que tiene sentido corresponde a un mínimo:

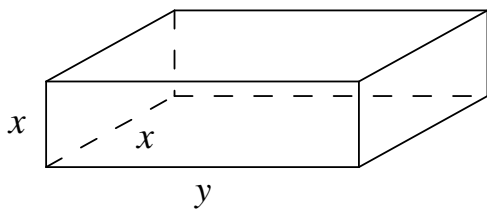
$$M''(x) = \frac{80x \cdot x^2 - (40x^2 - 360) \cdot 2x}{x^4} = \frac{80x^3 - 80x^3 + 720x}{x^4} = \frac{720x}{x^4} = \frac{720}{x^3}$$

$$M''(3) = \frac{720}{3^3} > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es un mínimo}$$

Por tanto las dimensiones del marco son: $\begin{cases} x = 3 \text{ m} \\ y = 2 \text{ m} \end{cases}$

Así, el coste del marco es: $40 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 120 + 120 = 240 \text{ €}$

10.- En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.



El problema a resolver es:

$$\begin{cases} x + x + y = 72 \\ v \equiv x^2 y \text{ máximo} \end{cases}$$

Como

$$2x + y = 72 \Rightarrow y = 72 - 2x$$

y sustituyendo en la expresión de v :

$$v = x^2(72 - 2x) = 72x^2 - 2x^3 = v(x)$$

Maximizamos $v(x)$:

$$v'(x) = 144x - 6x^2$$

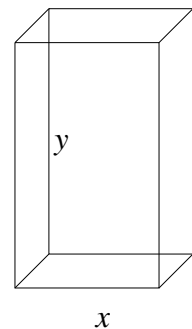
$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow x(144 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (No vale)} \\ x = \frac{144}{6} = 24 \end{cases}$$

$$v''(x) = 144 - 12x$$

$$v''(24) = -144 < 0 \Rightarrow x = 24 \text{ es un máximo}$$

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $24 \times 24 \times 24 \text{ (cm)}$.

11.- Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material; pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y altura) para que su precio sea el menor posible.



Si suponemos que el precio del material para la tapa y los laterales es de una unidad por cm^2 , el precio para 1 cm^2 de la base será de 1,5 unidades.

El precio del envase, que es la función que debemos minimizar, es:

$$p = x^2 + 4xy + 1,5x^2 = 2,5x^2 + 4xy$$

Esta función depende de dos variables, pero como sabemos que el volumen es de 80 cm^3 , se tiene:

$$V = x^2 y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

Sustituyendo en la función:

$$p = 2,5x^2 + 4x \frac{80}{x^2} = 2,5x^2 + \frac{320}{x} = p(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$p'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4 \text{ cm}$$

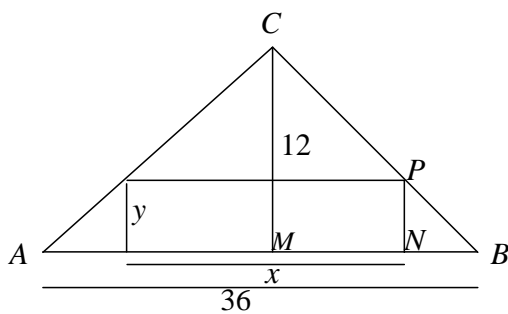
Para comprobar que se trata del precio mínimo, calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$p''(x) = 5 + \frac{640}{x^3}$$

$$p''(4) > 0 \Rightarrow x = 4 \text{ es un mínimo}$$

El envase de precio mínimo tiene una **base cuadrada de 4 cm de lado y una altura de 5 cm.**

12.- Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Supón que un lado del rectángulo está en la base del triángulo.



La función que debemos hacer máxima es el área del rectángulo: $A = xy$

Como esta función depende de dos variables, debemos buscar una relación entre ellas.

Los triángulos CMB y PNB son semejantes, por tanto:

$$\frac{MB}{CM} = \frac{BN}{PN} \Leftrightarrow \frac{18}{12} = \frac{18 - \frac{x}{2}}{y} \Leftrightarrow 3y = 36 - x$$

$$\Rightarrow x = 36 - y^2$$

Sustituimos en la función a maximizar:

$$A = 36y - 3y^2 = A(y)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(y) = 36 - 6y$$

$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 36 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

Sustituimos en la derivada segunda:

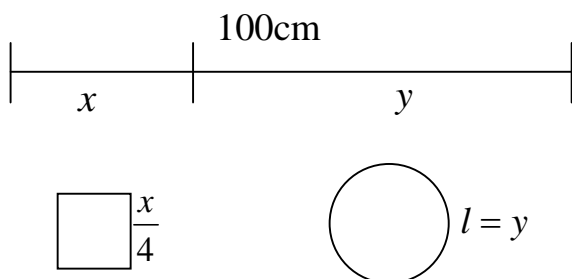
$$A''(6) = -6 < 0 \Rightarrow y = 6 \text{ es un máximo}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo son: $\begin{cases} y = 6 \text{ cm} \\ x = 18 \text{ cm} \end{cases}$

13. Un hilo de 100 cm se divide en dos trozos de longitudes x e y ; con el primero se forma un cuadrado y con el segundo un círculo. Razonadamente:

- Halla x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.
- Halla x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

La longitud de la circunferencia es $2\pi r = y$, y por tanto el radio es $r = \frac{y}{2\pi}$.



La función que tenemos que maximizar y minimizar es la suma de las áreas:

$$S = \frac{x^2}{16} + \frac{\pi y^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4\pi}$$

Además, sabemos que $x + y = 100$, es decir, $y = 100 - x$.

Sustituyendo:

$$S = \frac{x^2}{16} + \frac{(100 - x)^2}{4\pi} = S(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = \frac{x}{8} + \frac{-(100 - x)}{2\pi} = \frac{x}{8} - \frac{100 - x}{2\pi}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{100 - x}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow 2\pi x = 800 - 8x \Leftrightarrow x(2\pi + 8) = 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{800}{2\pi + 8} = \frac{400}{\pi + 4}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$S''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0 \Rightarrow x = \frac{400}{\pi + 4} \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, el valor hallado corresponde a un mínimo. Es decir, cuando $x = \frac{400}{\pi + 4}$ e

$y = 100 - \frac{400}{\pi + 4} = \frac{100\pi}{\pi + 4}$ la suma de las áreas es mínima.

El área será máxima en uno de los extremos del intervalo $[0, 100]$ en el que toma valores la variable x .

Si $x = 0$ e $y = 100$, el radio del círculo es $r = \frac{100}{2\pi}$, el área del cuadrado es 0 y el área del círculo es:

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot \frac{100^2}{4\pi^2} = \frac{10000}{4\pi} \approx 795,8 \text{ cm}^2$$

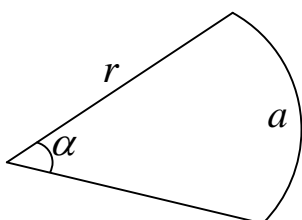
Si $x = 100$ e $y = 0$, el lado del cuadrado es 25 cm y el área del cuadrado es:

$$A_{\text{cuadrado}} = 25^2 = 625 \text{ cm}^2$$

Así, la función se hace máxima cuando $x = 0$, es decir, cuando todo el hilo se utiliza en hacer un círculo.

14. Un jardinero quiere hacer un parterre² en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Se pregunta acerca del radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.

- Expresa el área del parterre, S , como función del radio r .
- Determina el valor del radio que maximiza S .
- ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?
- ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?



Consideramos un sector circular de radio r , arco a y ángulo α .

Deducimos la fórmula del área de dicho sector a partir de la fórmula del área de círculo y de la longitud de la circunferencia.

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \text{y} \quad L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Si llamamos S al área del sector circular, se tiene:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{a} = \frac{\pi \cdot r^2}{S} \Rightarrow S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot a}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{ra}{2}$$

a) Para expresar el área S en función del radio utilizamos la relación que proporciona el perímetro del parterre, $2r + a = 20$, de donde:

$$a = 20 - 2r$$

Sustituimos en la fórmula de S :

$$S = \frac{r(20 - 2r)}{2} = 10r - r^2 = S(r)$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(r) = 10 - 2r$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 5 \text{ m}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$S''(r) = -2 < 0 \Rightarrow r = 5 \text{ es un máximo}$$

c) Para calcular el valor de la amplitud, α , correspondiente a esta solución, calculamos primero el valor de a :

$$a = 20 - 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}$$

y el ángulo correspondiente a este arco (expresado en radianes) se obtiene mediante una regla de tres:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{10} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{20\pi}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{10}{5} = 2 \text{ radianes}$$

d) Para garantizar que la solución corresponde a un máximo, hemos calculado la derivada segunda y hemos visto que tiene signo negativo.

15.- El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de x gramos y de $2 - x$ gramos, de forma que los dos rubíes formados sea mínima.

El valor de dos rubíes será, en función del peso de uno de ellos:

$$V(x) = k(x^2 + (x - 2)^2) = k(2x^2 - 4x + 4)$$

Calculamos la deriva e igualamos a cero:

² Jardín o parte de él con césped, flores y anchos paseos.

$$V'(x) = k(4x - 4)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow k(4x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$V''(x) = 4x$$

$$V''(1) = 4 > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un m\u00ednimo}$$

As\u00ed, ambos rub\u00eds deben pesar **1 gramo cada uno**.

16.- Se quieren construir dep\u00f3sitos cil\u00edndricos como el de la figura, con la condici\u00f3n de que la altura y el per\u00edmetro de la circunferencia sumen 100 m.

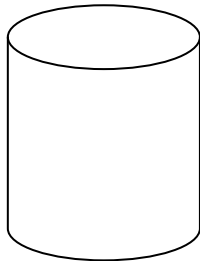
Comprueba que el volumen de los dep\u00f3sitos viene dado por la expresi\u00f3n:

$$V(r) = 100\pi \cdot r^2 - 2\pi^2 r^3$$

y determina las dimensiones del que tiene volumen m\u00e1ximo.

La funci\u00f3n que queremos hacer m\u00e1xima es el volumen del cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 h$$



La condici\u00f3n dada en el enunciado relaciona las dos variables que aparecen en la f\u00f3rmula del volumen:

$$h + 2\pi \cdot r = 100 \Rightarrow h = 100 - 2\pi \cdot r$$

Sustituyendo en V:

$$V(r) = \pi \cdot r^2 (100 - 2\pi \cdot r) = 100\pi \cdot r^2 - 2\pi^2 r^3$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$V'(r) = 200\pi \cdot r - 6\pi^2 r^2$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 200\pi \cdot r - 6\pi^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \begin{cases} 0 \\ \frac{100}{3\pi} \end{cases}$$

La soluci\u00f3n $r = 0$ corresponde a un cilindro degenerado de volumen 0. Estudiamos la soluci\u00f3n no nula, y para ello calculamos la derivada segunda:

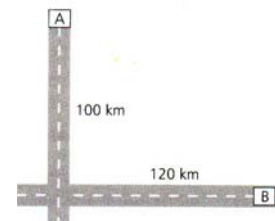
$$V''(r) = 200\pi - 12\pi^2 r$$

$$V''\left(\frac{100}{3\pi}\right) = 200\pi - 12\pi^2 \frac{100}{3\pi} = 200\pi - 400\pi < 0 \Rightarrow r = \frac{100}{3\pi} \text{ es un m\u00e1ximo}$$

El cilindro de volumen m\u00e1ximo tiene por dimensiones $r = \frac{100}{3\pi}$ m y $h = \frac{100}{3}$ m.

17.- Dos coches circulan por dos carreteras perpendiculares. El primero sale de la ciudad A a 100 km/h y el segundo de la ciudad B a 120 km/h en sentido al cruce de ambas carreteras.

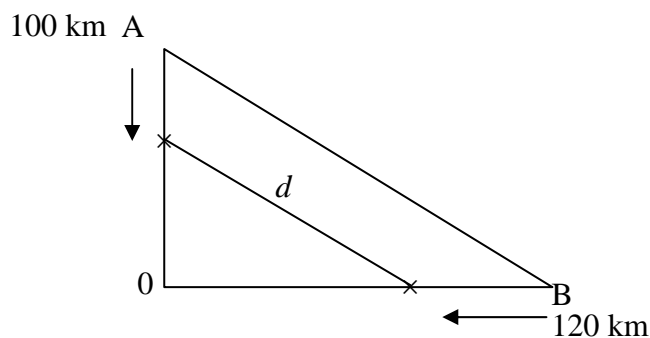
La distancia de A hasta el cruce es de 100 km y desde B hasta el cruce, de 120 km. \u00bfEn qu\u00e9 momento la distancia entre los dos coches es m\u00ednima?



Sea d la distancia que hay que minimizar. Sabemos que

$$e = v \cdot t$$

El espacio que le falta por recorrer a A es: $100 - 100t$



El espacio que falta por recorrer a B es: $120 - 120t$

Aplicando el teorema de Pitágoras: $d(t) = \sqrt{(100 - 100t)^2 + (120 - 120t)^2}$

Desarrollando y agrupando:

$$d(t) = 20\sqrt{66t^2 - 122t + 66}$$

Calculamos la derivada primera e igualamos a cero:

$$d'(t) = 20 \cdot \frac{1}{2} (66t^2 - 122t + 66)^{-\frac{1}{2}} (122t - 122) = \dots = \frac{10\sqrt{2(66t - 61)}}{\sqrt{33t^2 - 61t + 33}}$$

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow 10\sqrt{2(66t - 61)} = 0 \Leftrightarrow 66t - 61 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{61}{66}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$d''(t) = \frac{3175\sqrt{2}}{\sqrt{(33t^2 - 66t + 33)^3}}$$

$$d''\left(\frac{61}{66}\right) = \frac{264\sqrt{41910}}{127} > 0 \Rightarrow t = \frac{61}{66} \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, la distancia entre los dos coches es mínima para $t = \frac{61}{66} \approx 0,924$ horas, que son, aproximadamente, **55,44 minutos**.