EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

ANÁLISIS

2º DE BACHILLERATO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

DPTO DE MATEMÁTICAS
COLEGIO MARAVILLAS

Ejercicio 1

a) **(1.5 puntos)** Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

b) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\frac{3}{(2x-5)^2}+\mathrm{L}(1-x)\ , \qquad h(x)=\frac{e^x}{x^3+1}.$$

Ejercicio 2

Sea la función $f: R\to R$, definida por $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2+mx+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Calcule m para que la función sea continua en $x=1$.

b) **(1 punto)** Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x=1$?

c) **(1 punto)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

Ejercicio 3

Para la función $f: R\to R$ definida de la forma $f(x)=8x^3-84x^2+240x$, determine:

a) **(1.5 puntos)** Su monotonía y sus extremos relativos.

b) **(1.5 puntos)** Su curvatura y su punto de inflexión.

Ejercicio 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+2x-3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Estudie su derivabilidad en $x=0$.

b) **(1.5 puntos)** Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

Ejercicio 5

Se considera la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x+6 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -2x^2+8x-6 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}.$$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

b) **(1 punto)** Represente la gráfica de f.

c) **(0.5 puntos)** Indique los extremos relativos de la función.

Ejercicio 6

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases}-5x^2+40x-60 & \text{si} \quad 0\le x\le 6 \\[2ex] \dfrac{5x}{2}-15 & \text{si} \quad 6<x\le 10\end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) **(0.75 puntos)** Represente la función f.

b) **(0.75 puntos)** Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

c) **(0.75 puntos)** ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

d) **(0.75 puntos)** Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Ejercicio 7

Sean las funciones $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=2x-x^2$.

a) **(2 puntos)** Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Represéntelas gráficamente.

b) **(1 punto)** Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x)=f(x)-g(x)$.

Ejercicio 8

a) **(1.5 puntos)** La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice (0, 2) que corta al eje de abscisas en los puntos (−3, 0) y (3, 0). A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) **(1.5 puntos)** Calcule los extremos relativos de la función $g(x)=x^3-3x$.

Ejercicio 9

a) **(1.5 puntos)** Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x)=ax^3+3x^2-5x+b$ pase por el punto $(1, -3)$ y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

b) **(1.5 puntos)** Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x)=x^3-3x^2+7$.

Ejercicio 10

Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\[2ex] x-1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}.$$

a) **(1 punto)** Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) **(1 punto)** Determine la monotonía de f.

c) **(1 punto)** Represente gráficamente esta función.

Ejercicio 11

El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 7t & \text{si} \quad 0 \le t < 5 \\ 10 & \text{si} \quad 5 \le t \le 8 \end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

a) **(2 puntos)** Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) **(1 punto)** Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11.25 millones de euros.

Ejercicio 12

a) **(2 puntos)** Dada la función $f(x) = a(x-1)^2 + bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas (1, 2) y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) **(1 punto)** Calcule $g''(2)$ siendo $g(x) = \frac{1}{x} - x$.

Ejercicio 13

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) **(1 punto)** Obtenga la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = -1$.

b) **(0.5 puntos)** Halle su punto de inflexión.

c) **(1.5 puntos)** Dibuje la gráfica de la función, estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos.

Ejercicio 14

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) **(0.5 puntos)** Calcule sus asíntotas.

c) **(1 punto)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 15

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Dibuje la gráfica de f y estudie su monotonía.

b) **(0.75 puntos)** Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es -1.

c) **(0.75 puntos)** Estudie la curvatura de la función.

Ejercicio 16

a) **(1.5 puntos)** Determine a y b en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + 5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto (2, 9).

b) **(1.5 puntos)** Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

Ejercicio 17

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por la función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15, \quad 1 \le t \le 8$.

a) **(1 punto)** ¿Cuál será el valor de las existencias para $t = 2$? ¿Y para $t = 4$?

b) **(1 punto)** ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?

c) **(1 punto)** ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

Ejercicio 18

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Para $a = -2$ represente gráficamente la función f, e indique sus extremos relativos.

b) **(1.5 puntos)** Determine el valor de a para que la función f sea derivable.

Ejercicio 19

a) **(1 punto)** Halle la función derivada de la función $f(x) = L\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.

b) **(1 punto)** Obtenga las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$.

c) **(1 punto)** Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$.

Ejercicio 20

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Analice su continuidad y su derivabilidad.

b) **(1.5 puntos)** Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función.

Ejercicio 21

Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado) :

a) **(0.75 puntos)** $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2$.

b) **(0.75 puntos)** $g(x)=(x^2-1)\cdot L\,x$.

c) **(0.75 puntos)** $h(x)=2^{5x}$.

d) **(0.75 puntos)** $i(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$.

Ejercicio 22

a) **(1.25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a $y=\dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=2$.

b) **(1.25 puntos)** ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=2x^2+3x+1$, la recta tangente es paralela a $y=3x-5$?

c) **(0.5 puntos)** Sea $g(x)=2x^2-8x+a$. Halle a para que el valor mínimo de g sea 3.

Ejercicio 23

La temperatura *T*, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo *t*, en horas, por la expresión:

$$T(t)=40t-10t^2 \quad \text{con} \quad 0\le t\le 4.$$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) **(1.5 puntos)** ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

Ejercicio 24

a) **(1.5 puntos)** Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).

b) **(1.5 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{2}{x}+L\,x$ en el punto de abscisa $x=1$.

Ejercicio 25

El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x)=x^3-42x^2+576x-2296$, en función de la hora x, siendo $11\le x\le 20$.

a) **(1 punto)** Halle los extremos relativos de esta función.

b) **(1 punto)** Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

c) **(1 punto)** Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

Ejercicio 26

a) **(2 puntos)** Sea la función $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+b, & si \;\; x\le 2\\ a(x-3)^2+3, & si \;\; x>2\end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 2$.

b) **(1 punto)** Halle la función derivada de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

Ejercicio 27

Sea la función $f(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$.

a) **(1 punto)** Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(1 punto)** Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) **(1 punto)** Represéntela gráficamente.

Ejercicio 28

Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función

$$B(t)=t^3-9t^2+24t. \quad (\, t \text{ indica el tiempo, en años, } 0\le t\le 5\,).$$

a) **(2 puntos)** Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.
b) **(1 punto)** En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

Ejercicio 29

Sea la función $f(x)=\begin{cases}-4x-3 & si \quad x\le -1\\ 2x^2-1 & si \quad -1<x<1.\\ \dfrac{k+2}{x} & si \quad x\ge 1\end{cases}$

a) **(2 puntos)** Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en R y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.
b) **(1 punto)** Dibuje la gráfica de la función para $k=-1$.

Ejercicio 30

Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f:[0,45]\rightarrow \mathrm{R}$ cuya expresión analítica es $f(t)=7.2t-0.16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente esta función.
b) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?