EJERCICIOS DE CONTINUIDAD 2º BACHILLERATO

RECORDAR:

- $\boxed{f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$ Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".
- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  1) que exista límite
  2) que además exista imagen
  3) y que ambos coincidan

1. Dada $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide:
a) Representación gráfica.
b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en x=0
c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en x=0?

2. Ídem con $f(x) = \sqrt{x}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

e) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ h) $f(x)=\text{tg } x$

i) $f(x)=\log(x+3)$ j) $f(x)=\ln(x^2-4)$ k) $f(x)=\ln(x^2+4)$

(Soluc: a) discont en x=2; b) discont en x=2 y x=3; c) continua $\forall\Re$; d) discont en $x=n\cdot\pi$ donde $n\in Z$; e) continua en $[3,\infty)$; f) continua en $(-\infty,-2] \cup [3, \infty)$; g) continua $\forall\Re$; h) discont en $x=(2n+1)\cdot \pi/2$; i) continua en $(-3,\infty)$; j) continua en $(-\infty,-2) \cup (2, \infty)$; k) continua $\forall\Re$)

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, decir de qué tipo se tratan):

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

(Soluc: a) discont inevitable en x=0; b) discont evitable en x=0; c) discont evitable en x=2; d) continua $\forall\Re$; e) discont inevitable en x=0 y x=1)

5. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\le x<4 \\ 0 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua inevitable en x=3 y x=4)

6. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua inevitable en x=2)

7. ***(S)*** Probar que la función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en x=1 e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists f(1)$; discontinuidad evitable)

8. Considerar la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto?.¿Por qué?.

b) En x=1 la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: discontinua en x=1 pues $\nexists f(1)$; basta hacer f(1)=2)

9. ***(S)*** La función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en x=1. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de f(1), resultando así una función continua.

(Soluc: a=-3; f(1)=6)

10. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ k & \text{si } x=3\end{cases}$$

sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: k=6)

11. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x\neq 1/2\\ -5/3 & \text{si } x=1/2\end{cases}$$

(Soluc: discontinua inevitable en x=2)

12. ***(S)*** Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 2\\ 3-ax^2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

(Soluc: a=0)

13. ***(S)*** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Ln} x & \text{si } 0<x<1\\ ax^2+b & \text{si } 1\leq x<\infty\end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua y f(2)=3.

(Soluc: a=1 y b=-1)

14. ***(S)*** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\leq x<1\\ 2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función.

(Soluc: a=3 y b=-1)

15. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\leq 1\\ mx+n & \text{si } 1<x\leq 3\\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3\end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).

(Soluc: m=3, n=1)

16. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x\le -2 \\ ax+2 & \text{si } -2\le x\le 2 \\ x^2+b & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=-1/2, b=-3)

17. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x< -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\le x< 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=-2, b=1)

18. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x< -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\le x< 3 \\ cx & \text{si } 3\le x< 5 \\ 10 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

(*Soluc: a=-52, b=54, c=2)*

☞ ***Ejercicios del libro con solución pág. 246 y ss: 19, 20, 29***

TEOREMA DE BOLZANO:

RECORDAR:

- $\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{continua en } [a,b] \\ \text{signo } f(a)\ne \text{signo } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)\ /\ f(c)=0}$
- Se utiliza para demostrar la existencia de raíces de una ecuación en un intervalo.

19. Demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene al menos una solución en el intervalo [0,1].

20. ***(S)*** Demostrar que la ecuación $\pi^x=e$ tiene una solución en el intervalo (0,1). ¿Cuál es?.

(Soluc: x=1/ln π)

21. Demostrar que la ecuación $x=\cos x$ tiene al menos una solución en el intervalo (0,1).

22. a) Demostrar que la ecuación $3x^3-14x^2+3x+20$ tiene al menos una raíz en [1,2]
b) Obtener todas sus raíces por Ruffini, y comprobar la validez de lo obtenido antes.

23. a) Probar que la función $f(x)=x^4-2x^3-5$ corta al eje x en el intervalo (-2,-1)
b) Buscar otro intervalo en el que exista una solución de la ecuación $x^4-2x^3-5=0$ y aproximar su valor hasta las décimas.