TEMA 2 FUNCIONES. CONTINUIDAD.

1. Definición de Continuidad
2. Tipos de discontinuidades
3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas
4. Teoremas de continuidad
    4.1. Teorema de conservación del signo
    4.2. Teorema de Bolzano
    4.3. Teorema de Darboux

Contexto con la P.A.U.

En muchos de los exámenes de la PAU aparecen cuestiones donde tenemos que aplicar el teorema de Bolzano. La forma de plantearnos el problema en el examen varía:

- Nos dan una ecuación y nos piden demostrar que existe al menos una solución (pueden darnos o no un intervalo) para tal ecuación
- Nos dan una función y nos piden demostrar que esa función toma un valor determinado (pueden darnos o no un intervalo)
- Nos dan dos funciones f(x) y g(x), nos piden demostrar que estas funciones se cortan (pueden darnos o no un intervalo), es decir f(x)=g(x).

Todos estos problemas se resuelven operando con las igualdades de forma que obtengamos una de la forma F(x)=0, a dicha función, F(x), tendremos que aplicar Bolzano, bien en el intervalo que nos dan o buscar nosotros el intervalo.

En alguna de estas cuestiones se nos pide demostrar que la solución es única, para lo cual debemos demostrar que en ese intervalo la función es sólo creciente o decreciente, para lo cual necesitamos la derivada de la función y aplicar su relación con el crecimiento que veremos en el tema 4.

Otro problema típico de selectividad es el estudio de la continuidad y derivabilidad de una función (generalmente definida a trozos o un valor absoluto), o bien determinar el valor de unos parámetros para que la función sea continua o derivable. En este tema veremos cómo estudiar la continuidad de tales funciones, la derivabilidad se verá en el tema siguiente.

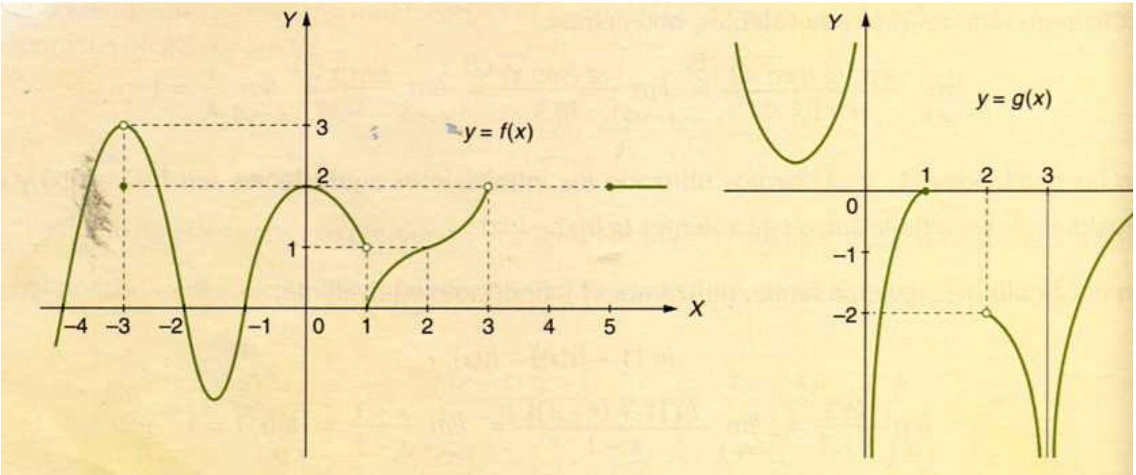
1. Definición de Continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

Definición: una función f(x) es continua en un punto x_0 si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2. La función definida en x_0, es decir $x_0 \in$ Dom(f(x))
3. Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to x_0} f(x)$=f(x_0).

Ejemplo:



1) Dom(f(x))=(-∞,3)∪[5,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=-3 → $\lim_{x\to -3} f(x)$ =3≠f(3)=2

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

c) x=5 → $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

2) Dom(g(x))=(-∞,0)∪(0,1]∪(2,3)∪(3,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=0 → $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la derecha

c) x=2 → $\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

d) x=3 → $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$ pero 3∉ Dom(g(x))

Definición: una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica "no levantamos el boli de la hoja para dibujarla"

En el ejemplo anterior f(x) continua en (-∞,-3), (-3,1), (1,3) y (5,∞). La función g(x) en (-∞,0), (0,1), (2,3) y (3,∞).

2. Tipos de discontinuidades

***Definición**:* una función f(x) es discontinua en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

a) Discontinuidad evitable

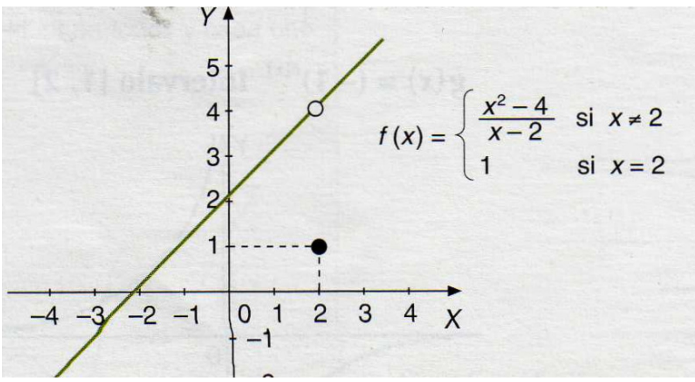
b) Discontinuidad no evitable

***Discontinuidad evitable*:** una función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si se cumple las siguientes condiciones:

1. El límite de la función en x_0 existe,
2. O el límite no coincide con $f(x_0)$ o bien la función no definida en x_0 (es decir $x_0 \notin dom(f(x))$)

Ejemplos:

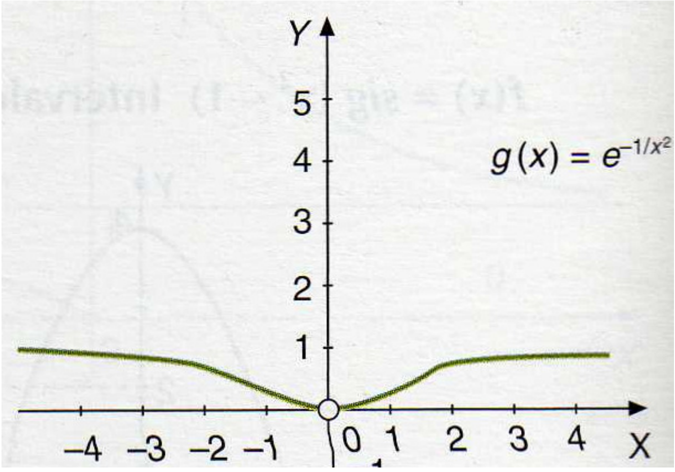
1)



$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x=2, haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir f(2)=4

Así la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \;\; x \neq 2 \\ 4 & si \;\; x = 2 \end{cases}$ si es continua pues $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

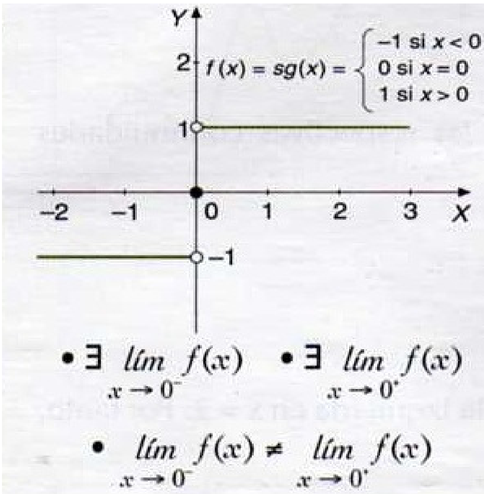
2)



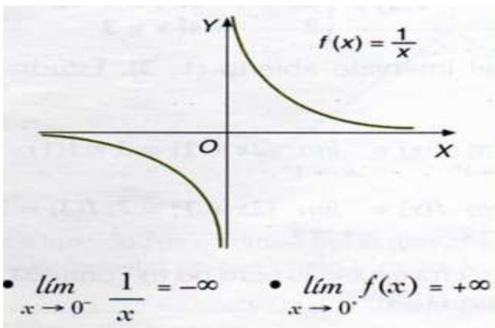
$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ pero $0 \notin$ Don(g(x)). Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la función tal que en x=0 esta valga lo mismo que el límite: g(x)= $\begin{cases} e^{-1/x^2} & si \ \ x \neq 0 \\ 0 & si \ \ x = 0 \end{cases}$

<u>Discontinuidad no evitable</u>: son las que cumplen que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

1) *Salto finito en x_0*: los límites laterales no coinciden $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$



2) *Salto infinito en x_0:* cuando los dos límites laterales en x_0 o al menos uno de ellos es +∞ o -∞.



3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas.

Las funciones elementales por lo general son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

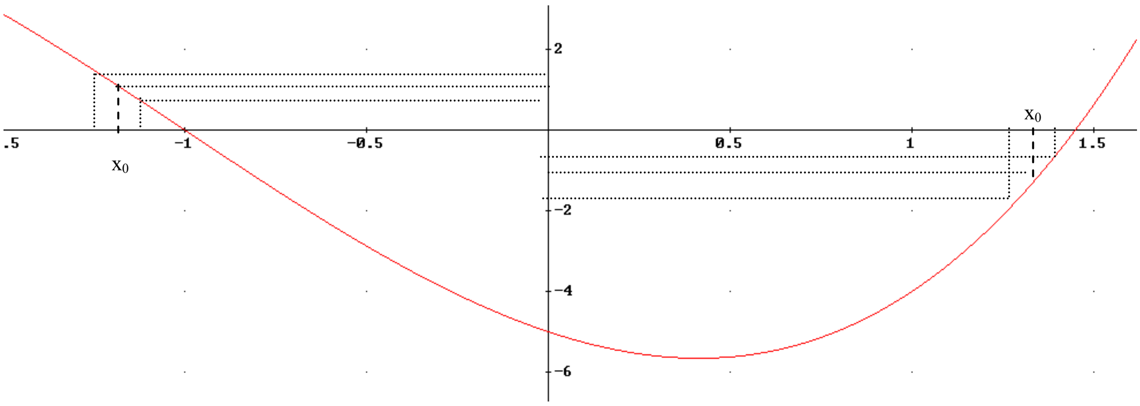
Operaciones de funciones continuas: sean f(x) y g(x) funciones continuas en x_0

1) La función suma y resta $(f \pm g)(x)$ continua en x_0
2) La función producto $(f \cdot g)(x)$ continua en x_0
3) La función división $(f/g)(x)$ continua en x_0 si $g(x_0)\neq 0$
4) Si g(x) continua en x_0 y f(x) continua en $g(x_0)$ entonces la función compuesta $(f\circ g)(x)$ continua en x_0.

4. Teoremas de Continuidad

4.1. Teorema de conservación del signo

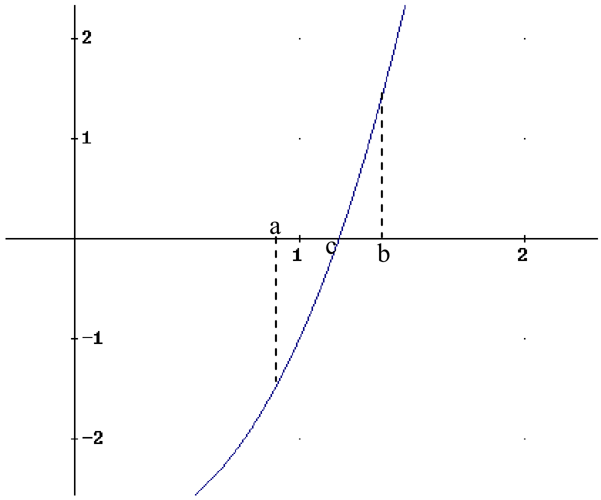
Teorema de conservación del signo: sea una función f(x) continua en el punto x_0 y tal que $f(x_0)\neq 0$, se cumple que en un entorno del punto la función conserva el signo, es decir si $f(x_0)>0$ en un entorno de x_0 la función positiva, y si $f(x_0)<0$ en un entorno de x_0 la función es negativa.

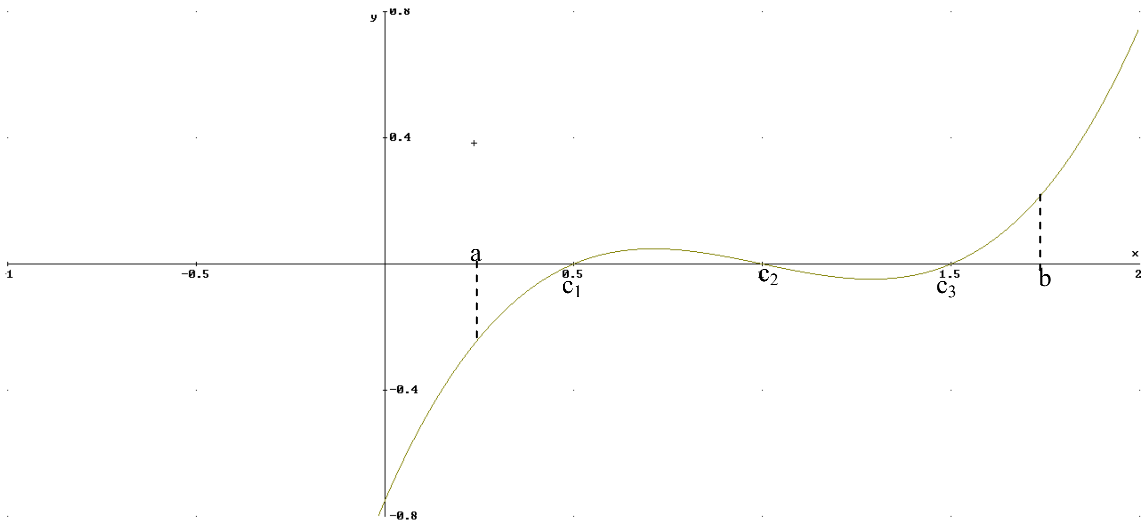


4.2 Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] tal que f(a) y f(b) tienen distinto signo ($f(a)\cdot f(b)<0$), entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Veámoslo gráficamente:





Vemos que el teorema de Bolzano nos asegura al menos una valor c tal que f(c)=0, pero como vemos puede ocurrir que no sea única. Para asegurar que sólo es única debemos además de aplicar Bolzano ver que la función en el intervalo (a,b) es siempre creciente o siempre decreciente

Ejercicio: encontrar un intervalo donde la función f(x)=$\frac{x^5+x^4-1}{x-3}$ corte al eje x, es decir f(x_0)=0

Tenemos que la función es continua en R-{3}. Busquemos un intervalo (que no contenga x=3) tal que el signo de sus extremos sea diferente.

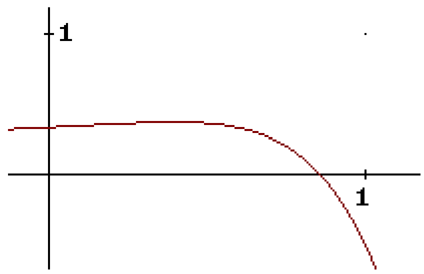
f(0)= 1/3>0 f(1)=-1/2<0

Así la función f(x) cumple Bolzano en [0,1]:

- es continua en este intervalo
- f(0)·f(1)<0

Luego $\exists$ c$\in$(0,1) : f(c)=0.

Veamos la función:

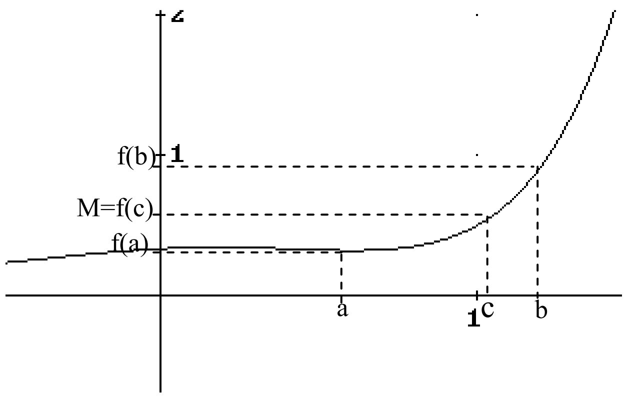


4.3 Teorema de Darboux

El teorema de Darboux es un corolario del teorema de Bolzano:

> ***Teorema de Darboux:*** sea f(x) una función continua en un intervalo [a,b] se cumple que para todo valor M∈[f(a), f(b)] existe un valor c∈(a,b) tal que f(c)=M.

Demostración: sea g(x)=f(x)-M, que será continua en [a,b] por las propiedades de la continuidad, y tal que g(a)·g(b)<0 luego g(x) cumple Bolzano y por tanto existe al menos un valor c: g(c)=f(c)-M=0→ f(c)=M.



Ejercicio: Decir un intervalo de x donde la función $f(x)=x^2-x+3$ valga 5.

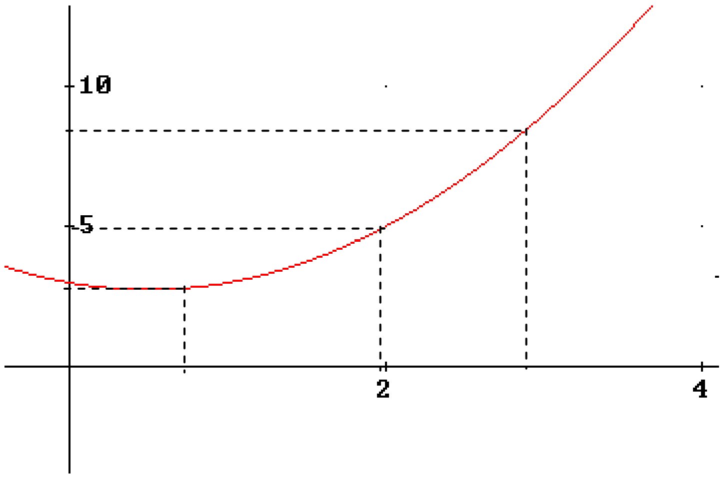
Esta función es continua en R, luego podemos aplicar el teorema de Darboux. Tenemos que buscar un intervalo [a,b] tal que 5 comprendido entre f(a) y f(b). Sea [1,3] se cumple f(1)=3 y f(3)=9 luego como 5∈(f(0),f(3)) → existe c∈(0,3) tal que f(c)=5.

Si bien podemos hacer este problema aplicando Bolzano:

Si f(x)=5 entonces $x^2-x+3=5$ → $x^2-x-2=0$. Llamando $g(x)=x^2-x-2$, veamos que cumple Bolzano en [1,3]:

- Es continua en este intervalo
- g(1)=-2, g(3)=4, luego g(1)·g(3)<0

Existe c∈(1,3) donde g(c)=0, y por tanto f(c)-5=0, y por tanto f(c)=5



Ejercicios

1) Estudia la continuidad de las siguientes funciones

a) f(x)= $\begin{cases} 5-\dfrac{|x|}{x} & si \ \ x \neq 0 \\ 5 & si \ \ x = 0 \end{cases}$

El valor absoluto puede dividirse en dos partes: cuando lo que está dentro del valor es negativo este cambia de signo, y si es positivo no se cambia.

$$f(x)= = \begin{cases} 5-\dfrac{-x}{x} & si \ x<0 \\ 5 & si \ \ x=0 \\ 5-\dfrac{x}{x} & si \ \ x>0 \end{cases} = \begin{cases} 6 & si \ \ x<0 \\ 5 & si \ \ x=0 \\ 4 & si \ \ x>0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to o} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to o^+} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to o^+} f(x) = 6 \end{cases}$ $no \ existe$, discontinuidad de salto finito

f(x) es por tanto continua en R-{0}

b) g(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si \ \ x \leq 2 \\ x+1 & si \ \ x>2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, que son continuos en R; De esta forma en el único punto que tenemos que estudiar la continuidad es en x=2, donde f(x) cambia de expresión analítica:

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} x+1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} x^2-1 = 3 \end{cases} = 3$ =f(2).

Luego g(x) continua en R.

c) h(x)= $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x \neq 3 \\ 6 & si \quad x = 3 \end{cases}$

Es una función a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica, así que en los puntos donde se anule el denominador puede no ser continua. Como coincide el punto donde se anula el denominador con el cambio de expresión analítica (x=3) sólo hay que estudiar la continuidad en este punto.

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 = f(3) = 6$$

La función h(x) es continua en R

d) l(x)= $\begin{cases} 2x-1 & si \quad x > -1 \\ 3 & si \quad x \leq -1 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, así que el único punto donde hay que estudiar la continuidad es en x=-1, donde cambia de expresión analítica:

$\lim_{x\to -1} l(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} l(x) = 3 \\ \lim_{x\to -1^+} l(x) = \lim_{x\to -1^+} 2x-1 = -3 \end{cases} \to No\, existe$, luego no es continua en x=-1, de salto finito.

De esta forma l(x) continua en R-{-1}.

2) Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo R

a) f(x)= $\begin{cases} sen(3x) & si \quad x \leq \pi/2 \\ 2k+\cos(2x) & si \quad x > \pi/2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, cada uno de ellos son expresiones trigonométricas, continuas en R, luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=π/2, donde la función cambia de expresión analítica. Veamos si f(x) es continua en π/2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} 2k+\cos(2x) = 2k-1 \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} sen(3x) = -1 \end{cases}$$

El límite existe si los límites laterales son iguales, esto ocurre si k=0. Además la segunda condición si k=0 se cumple f(π/2)=-1.

De esta forma la función es continua en R si k=0

b) g(x)= $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & si \;\; x \neq 2 \\ k & si \;\; x = 2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica que puede no ser continua en los puntos donde se anual el denominador (x=2). Como este punto coincide con el punto donde la función cambia de expresión analítica es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad de g(x).

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0}\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$ el límite no existe, así que indiferentemente del valor de k la función g(x) no es continua en x=2

c) k(x)= $\begin{cases} 1+|x| & si \; x<0 \\ k & si \;\; x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 & si \;\; x>0 \end{cases}$

Como |x| definido para valores negativos (x<0) es equivalente a sustituir |x| por –x:

k(x)= $\begin{cases} 1-x & si \; x<0 \\ k & si \;\; x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 & si \;\; x>0 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, cada uno de ellos son polinomios y por tanto continuas en R, luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=0, donde la función cambia de expresión analítica.

$$\lim_{x\to 0} k(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} 1+|x| = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{2}x+1 = 1 \end{cases} = 1$$

Para que sea continua ha de cumplir que k(0)= $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$. Por tanto k(x) será continua si k(0)=k=1 → k=1

e) $m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x-2} & si \; x>3 \\ \dfrac{x+3}{x-4}+k \, si \, x \leq 3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, cada uno de ellos son fracciones algebraicas, que pueden no ser continuas en los puntos donde se anulan el denominador. En la primera de ellas ocurre en x=2, pero como esa expresión analítica sólo para x>3, nuca tomará ese valor. La segunda se anula para x=4, pero como la expresión definida para x≤3 nunca tomará ese valor. Así que sólo hay que estudiar la continuidad en x=3, donde la función cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x\to 3} m(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+3}{x-4} + k = -6+k \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+2}{x-2} = \dfrac{11}{1} = 11 \end{cases}$$

El límite existe si k=17. Además con este valor m(3)=11 y por tanto continua en 3 y en todo R.

3) Hallar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=|x^2-6x+5|$

El dominio de la función $f(x)=|x^2-6x+5|$ y su continuidad es todo R, ya que el valor absoluto de f(x) es continuo en los mismos puntos en los que sea continua la función x^2-6x+5, que es un polinomio.

b) $g(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 2\sqrt{2}$.

El dominio de una raíz cuadrada son todos los puntos donde el radicando es positivo o cero. Como g(x) definida a partir de suma de tres funciones, el dominio será la intersección de los tres dominios. Veamos uno a uno por separado:

$\sqrt{4+x}$ Dom=[-4,∞)

$\sqrt{4-x}$ Dom=(-∞,4]

$2\sqrt{2}$ Dom=R

Dom(g(x))= [-4,∞)∩(-∞,4]∩R=[-4,4]

En los puntos del dominio la función es continua, pues el límite de la función coincide con el valor en el punto.

4) Determinar los parámetros a y b para que la siguiente función sean continua en todo R

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & si\ x \le 0 \\ ax+b & si\ 0 < x \le 1 \\ 1+x\ln(x) & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, y cada trozo es continua en su dominio de definición, pues el único que no es continua en todo R es $1+x\ln(x)$, pero como definida para x≥1 en este intervalo es continua.

Tendremos que ver la continuidad en x=0 y x=1 para asegurar que la función f(x) continua en todo R.

Continuidad en x=0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{x^2} = 0\cdot 1 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax+b = b \end{cases}$ El límite existe si b=0, además para este valor de b f(0)=0 y por tanto la función será continua

Continuidad en x=1

$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1+x\ln(x)) = 1+1\cdot 0 = 1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax = a \end{cases}$ El límite existe si a=1, además para este valor de a f(a)=1 y por tanto la función será continua

Si a=1 y b=0 la función será continua en R

5) Sean las funciones f(x)=$\begin{cases} 1 \; si \; x\in[0,1) \\ x \; si \; x\in[1,\infty) \end{cases}$ y g(x)=$\begin{cases} x+1 \; si \; x\in[0,2) \\ x \; si \; x\in[2,\infty) \end{cases}$ **estudiar la continuidad de f+g, f·g, f/g**

Estudiemos la continuidad de las funciones f(x) y g(x)

Fácilmente se puede comprobar que f(x) continua en todo dominio de definición [0,∞), y g(x) continua en todos los puntos de definición menos en x=2 donde los límites laterales no coinciden, es decir en [0,2)∪(2,∞).

a) (f+g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en [0,∞)∩([0,2)∪(2,∞))= =[0,2)∪(2,∞)

b) (f·g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en [0,∞)∩([0,2)∪(2,∞))= =[0,2)∪(2,∞)

c) (f/g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en [0,∞)∩([0,2)∪(2,∞))= =[0,2)∪(2,∞) ya que g(x) no se anula para ningún valor de x

6) Hallar las discontinuidades y clasifícalas en las siguientes funciones

a) $\mathbf{f(x)} = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

Será continua en R menos en los puntos donde se anula el denominador es decir x=0 y x=2, por tanto 0,2∉ Dom(f(x)). Veamos el límite en estos puntos para discernir el tipo de discontinuidad.

En x=0 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{-4}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{-4}{-2\cdot 0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^{-+}}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{-4}{-2\cdot 0^-}=-\infty\end{cases}\to salto\ \inf inito\ en\ x=0$

En x=2 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}=\frac{4}{2}=2\to evitable$

b) $g(x)=\begin{cases}2-x & si\ x\leq 0\\ e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$

Tanto 2-x como e^{-x} son continuas para todo R, luego la única posible discontinuidad puede ocurrir en x=0.

$\lim_{x\to 0}g(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{-x}=1\\ \lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}2-x=2\end{cases}$ Discontinuidad de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases}2 & si\ x=0\\ e^{-x} & si\ x\neq 0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{-x}=1\neq f(0)=2$ → Evitable

7) Estudiar continuidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-x) & si & x<-2\\ sen(\pi x) & si & -2\leq x\leq 2\\ 0 & si & 2<x<4\\ x^2-12 & si & x\geq 4\end{cases}$$

Función definida a trozos y en cada uno de ellos la función es continua en su dominio de definición (ln(-x) es continua si x<0). Veamos la continuidad en los puntos donde cambia la expresión analítica:

En x=-2 → $\lim_{x\to -2}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to -2^+}f(x)=sen(-2\pi)=0\\ \lim_{x\to -2^-}f(x)=\ln(2)\end{cases}$ Discontinua de salto finito

En x=2→ $\lim_{x\to 2}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}f(x)=0\\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=sen(2\pi)=0\end{cases}$ Continua en x=2

En x=4→ $\lim_{x\to 4}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 4^+}f(x)=16-12=4\\ \lim_{x\to 4^-}f(x)=0\end{cases}$ Discontinua de salto finito

8) Demuestra:

a) x=xsen(x)+cos(x) tiene solución en $[-\pi,\pi]$:

Definimos f(x)= xsen(x)+cos(x)-x tal que

a) es continua en R y por tanto en $[-\pi,\pi]$.
b) $f(-\pi)=-1+\pi>0$, $f(\pi)=0+1-\pi<0$.

De esta forma cumple Bolzano → $\exists c\in(-\pi,\pi)$: f(c)=0, es decir la ecuación solución en este entorno.

b) $3sen(x)=e^{-x}cos(x)$ en algún valor de x.

Definimos $f(x)=e^{-x}cos(x)-3sen(x)$ tal que

a) es continua en R.
b) Tomamos el intervalo $[0,\pi/2]$ → f(0)=1>0 $f(\pi/2)=0-3<0$.

Cumple Bolzano→ $\exists c\in(0,\pi/2)$: f(c)=0, es decir la ecuación solución en este entorno.

9) La función cotg(x) tiene distintos signos en los extremos de los intervalos [3π/4, 5π/4] y sin embargo no corta el eje x. ¿Entonces contradice esto Bolzano?

No contradice Bolzano pues cotag(x) no es continua en $\pi\in[3\pi/4, 5\pi/4]$

10). Demostrar $f(x)=x^3-8x+2$ corta al eje OX en (0,2). ¿se puede decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$?

f(x) cumple:

a) continua en (0,2)
b) f(0)=2>0, f(2)=-6<0

Luego cumple Bolzano → $\exists c\in(0,2)$: f(c)=0

No podemos decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$, pues en $x=1\in(0,2)$ no es continua.

11) Sea f(x) una función que cumple f(-2)<0 y f(0)>0 ¿Es siempre cierto que existe un valor c en (-2,0) tal que f(c)=0

Si f(x) es continua en el intervalo [-2,0] podemos asegurar que se cumple dicha afirmación (por el teorema de Bolzano). Sino no es así no podemos asegurar tal afirmación.

12) Estudiar el dominio y discontinuidad de $f(x)=\ln((x+2)/x^2)$

Pasos:

1) Dominio de $(x+2)/x^2$ → R-{0}

2) Al ser un logaritmo→ $(x+2)/x^2>0$: Como x^2 siempre positivo tenemos que ver cuándo $(x+2)>0$, esto ocurre en el intervalo $(-2,\infty)$

De esta forma el dominio será $(-2,\infty)$ menos el punto x=0→Dom(f(x))=$(0,-2)\cup(0,\infty)$.

En todos los puntos del dominio la función es continua pues el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto.

13) Hallar a y b para que f(x) cumpla Bolzano en [-π,π]. Hallar c que cumple Bolzano

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & si\ \ -\pi\le x\le 0\\ a+x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si\ 1\le x\le\pi\end{cases}$$

Para que cumpla Bolzano tenemos que obligar a la función a que sea continua en [-π,π], y por tanto en x=0 y x=1

En x=0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\cos(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a+0=a\end{cases}$ → a=1

En x=1: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1^2+1=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{b}{1}=b\end{cases}$ → b=2

Si a=1 y b=2 la función es continua en [-π,π], vamos ahora que cumple la segunda condición:

f(-π)=-1<0

f(π)=1/π>0

Luego cumple Bolzano ∃c∈(-π,π): f(c)=0

Busquemos el valor c:

a) Veamos si c∈[-π,0]→ cos(c)=0 → c=-π/2

b) Veamos si c∈[0,1]→$1+x^2=0$ no solución

c) Veamos si c∈[1,π]→2/x=0 no solución

14) Demuestra la ecuación π^x =e tiene solución en (0,1), ¿lo cumple también ϕ^x=e?

a) π^x=e solución en (0,1)→ definimos f(x)=π^x-e, se cumple:

a) continua en [0,1]

b) además f(0)=1-e<0 y f(1)=π-e>0

Al cumplir Bolzano ∃c: (0,1): f(c)=0, y por tanto la ecuación tiene solución en (0,1)

b) ϕ^x=e solución en (0,1) → definimos f(x)= ϕ^x-e, se cumple:

a) continua en [0,1]

b) pero f(0)=1-e<0 y f(1)= ϕ-e<0

Luego no cumple Bolzano y no podemos asegurar que corte el eje OX.

Ejercicios de la P.A.U.

Junio de 2004.Prueba A

C-2: Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto si x>0

Si se cortan f(x)=g(x).

Definimos $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1/x$. Si h(x)=0 entonces f(x)=g(x) y las funciones se cortarán.

Veamos que cumple Bolzano y por tanto h(x)=0:

a) es continua para x>0 (no se anula el denominador).
b) busquemos un intervalo donde cumpla Bolzano, por ejemplo [0.1,1]: $h(0.1)=e^{0.1}-1<0$; $h(1)=e-1>0$

Luego cumple Bolzano $\exists c\in(0.1,1)$: h(c)=0, y por tanto f(c)=g(c) cortándose en c estas dos funciones

Junio de 2005. Prueba B

C-3.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función *f* definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } \; x\neq 0\\ \beta & \text{si } \; x=0\end{cases}.$$

La función $\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}$ es continua en R-{0}, pues $1+e^{1/x}$ nunca se anula. El único problema es en x=0, al anularse el denominador del exponente. Por otro lado en x=0 la función cambia de expresión analítica, luego es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad:

Continua en x=0 si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\beta$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\frac{\alpha}{1+e^{1/0}}=(ind)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^+}}=\dfrac{\alpha}{\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^-}}=\dfrac{\alpha}{1}\end{cases}$$ →Para que exista el límite α=0. Si α=0 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=0.

Por otro lado para ser continua f(0)= $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ → β=0

Luego si β=0 y α=0 la función será continua en x=0 y por tanto en todo R

Septiembre de 2006. Prueba A

PR2. b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$

Definamos la función $f(x)=3x-e^x$, si demostramos que $f(x)=0$ en $(-\infty,1]$ entonces se cumplirá la ecuación. Para esto apliquemos Bolzano:

a) f(x) es continua en R y por tanto continua en todo intervalo
b) busquemos el intervalo [a,b] comprendido en $(-\infty,1]$ y tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Por ejemplo [0.5, 1]: $f(1)=3-e<0$, $f(0.5)=1.5-e^{0.5}>0$.

Así f(x) cumplirá Bolzano en [0.5, 1] y por tanto existe al menos un valor $c\in(0.5,1)$, y por tanto en $(-\infty,1]$ tal que $f(c)=0$, y por tanto se cumple la ecuación.

Junio de 2007.Prueba A

C-4. Demostrar que las curva f(x)=sen(x) y g(x)=1/x se cortan en algún punto del intervalo (2π, 5π/2)

Si f(x) y g(x) se cortan en algún punto → f(x)=g(x) → sen(x)=1/x . Para poder aplicar Bolzano pasamos 1/x al otro miembro → $\underbrace{sen(x)-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0$. De esta forma resolver la ecuación es lo mimos que ver que h(x)=0.

Apliquemos Bolzano a h(x) en el intervalo marcado (2π,5π/2):

a) Continua en [2π,5π/2] ya que h(x) continua en todos los reales menos en el 0, y $0\notin[2\pi,5\pi/2]$.

b) $h(2\pi)=sen(2\pi)-1/(2\pi)=-1/(2\pi)<0$, $h(5\pi/2)=sen(5\pi/2)-1/(5\pi/2)=1-2/(5\pi)>0$

Luego cumple Bolzano, y por tanto existe un punto $c\in(2\pi,5\pi/2)$ tal que h(c)=0, y por tanto en este punto se cumple la igualdad f(c)=g(c), cortándose las dos gráficas

Junio de 2007.Prueba B

PR-2 (b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c+e^{-c} = 4$.

Si modificamos la igualdad → $\underbrace{x+e^{-x}-4}_{f(x)}=0$ tendremos que la ecuación solución si existe un punto c tal que f(x)=0,es decir si podemos aplica Bolzano:

a) Continua en R, luego podemos tomar cualquier intervalo para aplicar Bolzano

b) busquemos el intervalo f(0)=1-4<0. Si tomamos x=4, como e^{-x} siempre positivo se obtenemos el otro extremo del intervalo: $f(4)=4+e^{-4}-4>0$.

Luego cumple Bolzano en [0.4] y por tanto existe $c\in(0,4)$ tal que f(c)=0, y entonces $c+e^{-c}=4$ solución en (0,4).

C1. Hallar a y b para que f(x) continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ \ x>0 \\ b & si\ \ x=0 \\ \dfrac{sen(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \end{cases}$$

La función xln(x) es continua si x>0 y $\frac{sen(\pi x)}{x}$ es continua en x<0, pues no toma el valor x=0. De esta forma cada trozo de la función son continuas en los dominios de definición. Por esta razón sólo hay que estudiar la continuidad en x=0

Continuidad en x=0. Será continua si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=(*)=\pi \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=(*)=a \end{cases}$ → el límite existe si a=π y valdrá $\lim_{x\to 0} f(x)$=π

(*) calcularemos estos límites en el tema 4 (Teorema de L'Hopital)

f(0)=b, como $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ →b=π

De esta forma si a=π y b=π la función continua en x=0 y por tanto en todo R.