TEMA 5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Contexto con la P.A.U.

En este tema aplicaremos lo visto en los temas anteriores para la representación gráfica de las funciones. En el examen de la PAU no se suelen pedir todos los pasos que estudiaremos para la representación de la función, por lo general tendremos que esbozar la gráfica a partir de:

- Monotonía o Crecimiento
- Curvatura
- Asíntotas

Por lo general es suficiente con estas tres pautas el esbozo de la gráfica, si bien se recomienda aunque no lo pida el examen calcular el dominio.

Las funciones que suelen representarse son:

- Funciones fraccionales, la mayor dificultad es en la segunda derivada, que hay que factorizar para calcular los valores que anulan esta segunda derivada (puntos de inflexión).
- Funciones exponenciales, la mayor dificultad es resolver las distintas ecuaciones exponenciales que aparecen al igualar las derivadas. Cuando estudiemos las asíntotas horizontales y oblicuas hay que estudiar los límites tanto cuando x tiende a ∞ o a -∞, ya que no siempre dan el mismo resultado como ocurre en las funciones fraccionales. Nota: recordemos que $e^{f(x)}$ siempre es mayor que cero, con independencia de f(x).
- Funciones logarítmicas, cuyas complicaciones son las mismas que las exponenciales, las ecuaciones logarítmicas a resolver y las asíntotas horizontales y oblicuas. También importante es el dominio, recordemos que el argumento del logaritmo tiene que ser positivo.

ANEXO: resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a) Exponenciales: para quitar la incógnita del exponente tomamos logaritmos a ambos lados de la igualdad
b) Logaritmos: agrupamos todos los logaritmos en uno a partir de las propiedades de los logaritmos. Para quitar la incógnita del logaritmo tomamos exponente a ambos lados de la igualdad.

Ejemplo:

$$2e^{x^2+1}=15 \rightarrow e^{x^2+1}=\frac{15}{2} \rightarrow x^2+1=\ln(15/2) \rightarrow x=\pm\sqrt{\ln(15/2)-1}$$

$$\ln(x+1)-\ln(x)=4 \rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=4 \rightarrow \frac{x+1}{x}=e^4 \rightarrow x=\frac{-1}{1-e^4}$$

1. Representación de funciones

Mediante el ordenador o algunas calculadoras representar una función es sencillo, pero sin estas herramientas debemos estudiar características previas de la función antes de representarla. Los pasos son:

- El dominio
- Puntos de corte con los ejes
- Signo de la función
- Simetría y perioricidad
- Asíntotas
- Monotonía y puntos relativos
- Curvatura y puntos de inflexión

1.1. Dominio

El primer paso es ver donde está definida la función, es decir los posibles valores que puede tomar la variable independiente (x). Recordemos que el domino de los polinomios son todos los reales. Los casos en los que algún punto no pertenece al dominio son: (ver tema 1)

a) Se anulan denominadores → asíntota vertical en el punto

b) No existen logaritmo de números negativos

c) No existe el logaritmo del cero→ asíntota vertical (si está el logaritmo en el numerador)

d) No existen raíces cuadradas o de orden par para números negativos

1.2. Punto de corte con los ejes

1.2.1. Con el eje OX

Corta con el eje OX cuando y=0. Obtendremos los puntos de corte con este eje igualando la función a cero viendo los puntos $x_1,x_2,\ldots\in Dom(f(x))$ que anulan la función. Los puntos $(x_1,0)$, $(x_2,0)$… son los puntos de corte con el eje OX

1.2.2. Con el eje OY

Corta con el eje OY cuando x=0, siempre que $0\in Dom(f(x))$. Sólo puede cortar una vez con el eje OY. El punto de corte con el eje OY es $(0,f(0))$

Ejemplo: $f(x)=\ln(x^2-3)$

Con eje OX (y=0) → $0=\ln(x^2-3)$ → $x^2-3=e^0=1$ → $x^2=4$ → $x=\pm2$ $P_1(2,0)$ y $P_2(-2,0)$

Con eje OY(x=0)→$0\notin Dom(f(x))$ luego no corta con el eje OY

1.3. Signo de la función

Estudiar el signo de la función es ver los valores de x en los cuales f(x)>0 o f(x)<0. Para obtener estos intervalos basta con estudiar el signo entre los intervalos de los valores de x que anulan la función (corte eje OY) y los puntos que no pertenecen al dominio. En el caso que la función definida a trozos, también se toman los puntos donde cambia de expresión analítica.

1.4. Periodicidad y simetría

1.4.1 Periodicidad:

las funciones son periódicas cuando se repiten cada cierto intervalo, T, llamado periodo de la función ($f(x)=f(x+nT)$). Los ejemplos clásicos son las funciones trigonométricas.

Ejemplo:

$sen(2x)$ su periodo es $T=\pi$, pues $sen(2(x+n\pi))=sen(2x+2\pi n)=sen(2x)$

1.4.2 Simetría

La simetría puede ser de dos tipos:

a) *Simetría par o respecto al eje OY*, la función es igual a la izquierda y derecha del eje OY. Es como si este eje hiciera de espejo. Ocurre cuando se cumple:

$$\mathbf{f(x)=f(-x)}$$

b) *Simetría impar o respecto al origen*, la función a la derecha del eje OY es igual que a la izquierda pero con distinto signo. Ocurre cuando se cumple:

$$\mathbf{-f(x)=f(-x)}$$

Ejemplo: estudiar simetría de las siguientes funciones: $f(x)=x^4-3x^2+6$, $g(x)=x^5-2x^3-x$, $h(x)=\frac{x^3-x}{x^5+5x}$, $i(x)=\frac{x^2-1}{x^3+x}$, $j(x)=x^3-3x^2+2x+1$

a) $f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2+6= x^4-3x^2+6=f(x)$ Par

b) $g(-x)= (-x)^5-2(-x)^3-(-x)= -x^5+2x^3+x=-(x^5-2x^3-x)=-g(x)$ Impar

c) $h(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^5+5(-x)}=\frac{-(x^3-x)}{-(x^5+5x)}=\frac{x^3-x}{x^5+5x}=h(x)$ Par

d) $i(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^3+(-x)}=-\frac{x^2-1}{x^3+x}=-i(x)$ Impar

e) $j(-x)=(-x)^3-3(-x)^2+2(-x)+1=-x^3-3x^2-2x+1\neq j(x)$ y de $-j(x)$ No simetría

***Nota*: si no hay denominadores será par cuando sólo tenemos expresiones x^n con n par (recordar que $5=5x^0$, luego es par). Será impar cuando sólo tenemos expresiones x^n con n impar; si están mezclados términos impares y pares la función no tendrá simetría.

Si tenemos denominadores para que sea simétrica tanto el denominador como el numerador han de ser simétricos. Así:

- si numerador y denominador los dos misma simetría (los dos par o los dos impar)→la función simetría par (ver h(x))

- si numerador y denominador distinta simetría (uno par y otro impar) entonces →la función simetría impar (ver i(x))

1.5 Asíntotas

Vertical

La función f(x) tiene asíntota vertical en x_0 cuando existe alguno de estos 6 límites:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

La asíntota vertical tiene de expresión analítica $x=x_0$. La función f(x) se aproxima infinitamente a la recta $x=x_0$. En la práctica las asíntotas ocurren en los puntos donde se anula el denominador o anula un logaritmo (cuando está en el numerador).

Una función puede tener varias asíntotas verticales.

Horizontal

Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$ (tiende a la recta $y=y_0$ cuando x→∞)

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ (tiende a la recta $y=y_0$ cuando x→-∞)

Cuando la función tiene una asíntota horizontal se aproxima infinitamente a la recta $y=y_0$ cuando x tiende a +∞, -∞ o los dos.

Una función tiene como máximo 2 asíntotas horizontales, una cuando x→∞ y otra cuando x→-∞, aunque por lo general suelen coincidir (sobre todo en funciones polinómicas o fracciones algebraicas).

En funciones que son fracciones algebraicas ($\frac{p(x)}{q(x)}$) tiene asíntota horizontal cuando el grado del numerador es menor al del denominador (asíntota x=0) o igual (asíntota $x=a_n/b_n$,con a_n y b_n coeficientes de mayor grado de p(x) y q(x) respectivamente) .

Oblicua

Una función f(x) tiene una asíntota oblicua cuando se aproxima infinitamente a una recta de la forma y=mx+n (m≠0). Existe si se el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ existe y es distinto de $\pm\infty$ y de 0. Si esto ocurre:

m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

n= $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx$ → por lo general si m≠0 y ∞ n es un número real, pero hay algún caso donde el límite de ∞ y entonces no tiene asíntota oblicua (PAU Septiembre 2008)

Si una función tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua, por lo que no sería necesario su estudio.

En la práctica las asíntotas oblicuas en las funciones fraccionarias ocurren cuando el grado del denominador es un grado inferior al del numerador

Ejemplo: calcular las asíntotas de las siguientes funciones

a) f(x)=$\dfrac{2x^3-1}{x^2+4x+3}$

b) g(x)= $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

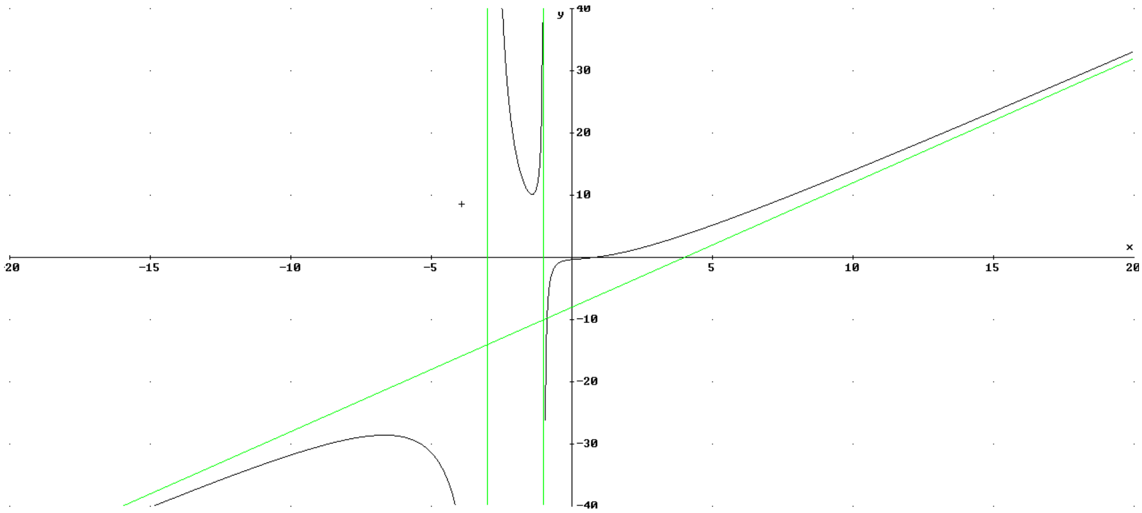
c) h(x)=$\dfrac{\ln(x)}{x-2}$

a) f(x)=$\dfrac{2x^3-1}{x^2+4x+3}$

- Asíntota Vertical: $x^2+4x+3=0 \rightarrow$ x=-1, x=-3.
- Asíntota Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. No asíntota horizontal
- Asíntota Oblicua: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^3-1}{x^2+4x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-1}{x^3+4x^2+3x}=2=m$

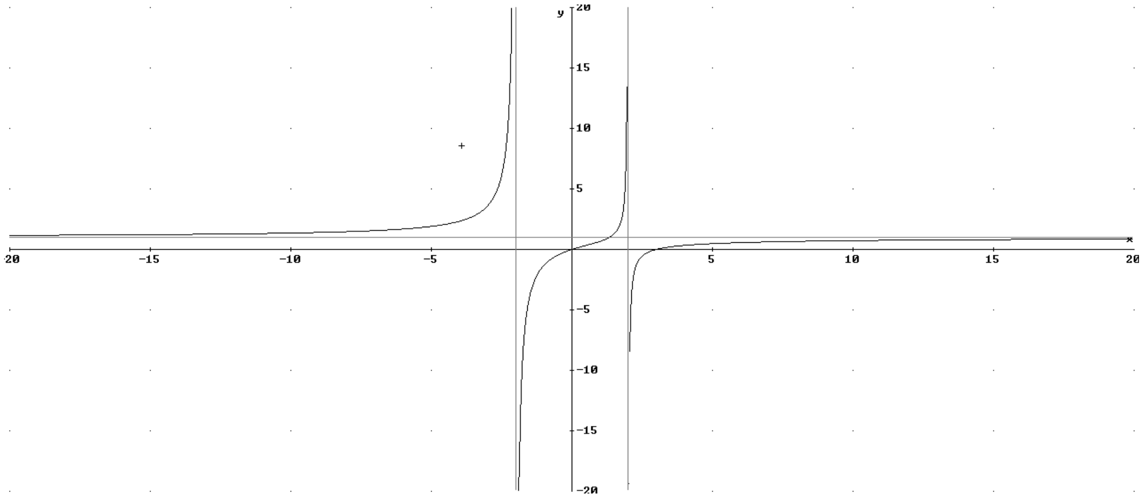
$$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^2+4x+3}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2-6x-1}{x^2+4x+3}=-8.$$

Luego la asíntota oblicua es y=2x-8



b) g(x)= $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

- Asíntota Vertical: $x^2-4=0 \rightarrow$ x=-2, x=2
- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}=1 \rightarrow$ y=1
- No puede tener asíntota oblicua al tener horizontal



c) h(x)=$\frac{\ln(x)}{x-2}$

- Asíntota Vertical en x=0 (se anula el logaritmo) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x-2}=\frac{\infty}{-1}=-\infty$

x=2 (se anula el denominador) $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x)}{x-2}=\frac{\ln(2)}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x)}{x-2}=\frac{\ln(2)}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 2^-}\frac{\ln(x)}{x-2}=\frac{\ln(2)}{0^-}=-\infty\end{cases}$

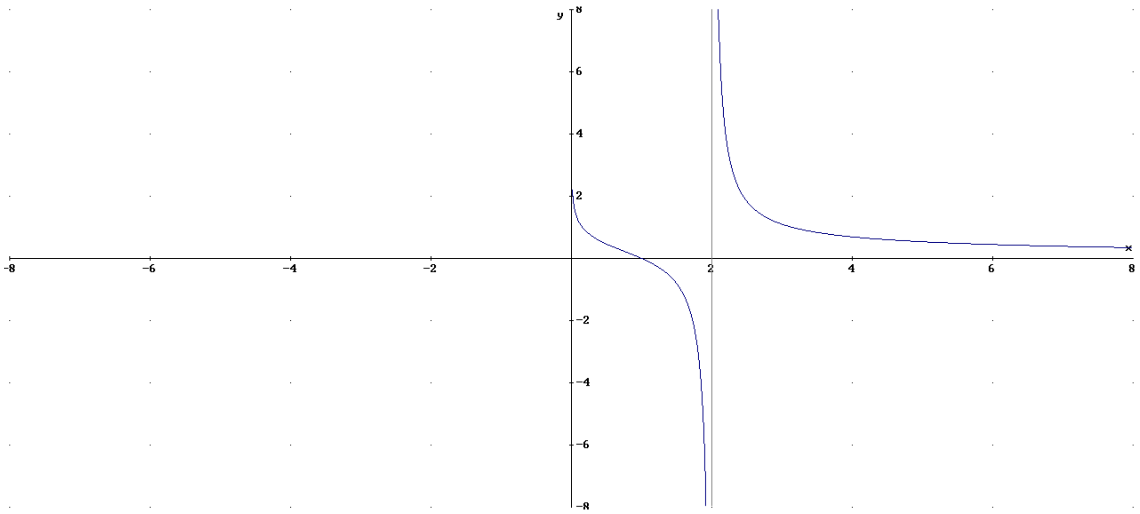
- Asíntota Horizontal $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$ y=0 (cuando x→∞)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x)}{x-2}$ no existen logaritmos negativos

Luego la asíntota horizontal es y=0 sólo es cuando x→∞

- No asíntota oblicua cuando x→∞ al tener horizontal. Veamos cuando x→-∞

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-2x}$ no existe



1.6. Primera derivada. Crecimiento y puntos relativos

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento y los puntos relativos de una función f(x) tendremos que estudiar el signo de la primera derivada, f'(x). Como vimos en el tema anterior:

a) si $f'(x)>0$ creciente

b) si $f'(x)<0$ decreciente

c) si $f'(x)=0$ punto relativo (si $f''(x)\neq 0$)

En la práctica igualamos $f'(x)=0$ y estudiamos el signo de $f'(x)$ entre los puntos donde se anula la derivada y los valores que no pertenecen al dominio. Si la función definida a trozos también tendremos que añadir entre estos puntos aquellos donde cambia de expresión analítica

1.7. Segunda derivada. Curvatura y Puntos de Inflexión

Para estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de una función f(x) tendremos que estudiar el signo de la segunda derivada, f''(x). Como vimos en el tema anterior:

a) si $f''(x)>0$ cóncava hacia arriba

b) si $f''(x)<0$ cóncava hacia abajo

a) si $f''(x)=0$ punto de inflexión (si $f'''(x)\neq 0$)

En la práctica igualamos $f''(x)=0$ y estudiamos el signo de $f''(x)$ entre los puntos donde se anula la 2ª derivada y los valores que no pertenecen al dominio. Si la función definida a trozos también tendremos que añadir entre estos puntos aquellos donde cambia de expresión analítica

1.8. Representación de la función

A partir del estudio realizado en los anteriores apartados no debería ser difícil representar un boceto de la función.

Ejemplos:

1) f(x)=$\boldsymbol{\dfrac{x-1}{x+1}}$

I) <u>Dominio</u>=R-{-1}

II) <u>Puntos de cortes:</u>

a) Con el eje OY: $x=0\in Dom(f(x)) \rightarrow f(0)=-1$ **$P_c(0,-1)$**

b) Con eje OX: $y=0 \rightarrow f(x)=0$ $x=1$. **$P_c(1,0)$**

III) <u>Signo de la función:</u> se estudia el signo entre los puntos de corte con el eje OY y los puntos que no pertenecen al dominio:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
Signo f(x)	+	$\notin$	-	0	+
				$P_c(1,0)$	

IV) Simetría y Periodicidad

No periódica

Simetría → f(-x)= $\frac{-x-1}{-x+1}$ ≠f(x) y ≠-f(x) No simétrica

V) Asíntotas

a) Asíntota Vertical: **x=-1**

b) Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ →

y=1 (cuando x→∞ y x→-∞)

c) Asíntota oblicua: no tiene al tener horizontal

VI) Primera derivada, crecimiento y puntos relativos

f ´(x)=$\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

Vemos que siempre es positiva para todo valor de x

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
Signo f'(x)	+	No existe $-1\notin$ Dom(f)	+
Crecimiento	↗		↗
		No Punto relativo	

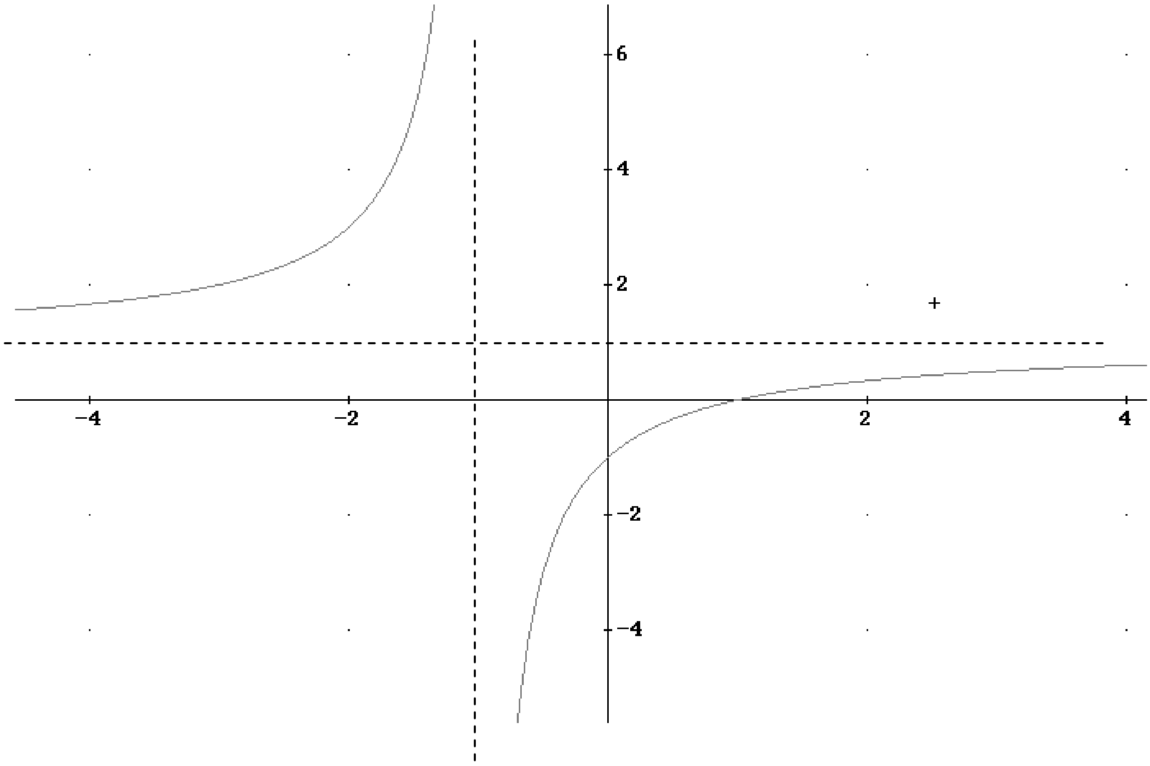
VII) Segunda derivada, curvatura y puntos de inflexión

f ´´(x)=$\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}$

Como $(x+1)^4$ es positivo sólo tenemos que estudiar el signo de (x+1), por eso no simplificamos la fracción. El signo de la segunda derivada es:

Intevalo	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	No existe $-1\notin$ Dom(f)	-
Cocavidad	∪		∩
		No P.I.	

VIII) Representación:



2) y=f(x)=$\frac{x^3}{x^2-4}$

I) Dominio

$x^2-4=0$ **Dom(f(x))=R-{-2,2}**

II) Puntos de corte con los ejes:

a) Eje OY (x=0), como $0\in$ Dom(f(x)) $P_c(0,f(0))$ → $\mathbf{P_c(0,0)}$

b) Eje OX (y=0). $x^3=0$ → $\mathbf{P_c(0,0)}$

III) Signo de la función:

Puntos representativos x=-2,0,2

Intervalo	(-∞,-2)	-2	(-2,0)	0	(0,2)	2	(2,∞)
Signo f(x)	-	∉	+	0	-	∉	+
				$P_c(0,0)$			

IV) Simetría y Periodicidad.

No periódica

Simetría: f(-x)= $\frac{-x^3}{x^2-4}=-f(x)$ → simetría impar, respecto el origen

V) Asíntotas

a) Asíntotas Vertical: **x=-2, x=2**

b) Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$ No asíntota Horizontal

c) Asíntota Oblicua: $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1$,n= $\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x^2-4}=0$

y=x

VI) Primera derivada Crecimiento y Puntos relativos:

y=f´(x)= $\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$, f'(x)=0 → $x^4-12x^2=0$ x=0, x= $\pm\sqrt{12}$

	(-∞, $-\sqrt{12}$)	$-\sqrt{12}$	($-\sqrt{12}$,-2)	-2	(-2,0)	0	(0,2)	2	(2, $\sqrt{12}$)	$\sqrt{12}$	($\sqrt{12}$,∞)
f'(x)	+	0	-	∉	-	0	-	∉	-	0	+
crec	↗	**M(** $-\sqrt{12},-\frac{3}{2}\sqrt{12}$ **)**	↘		↘	PI	↘		↘	**m(** $\sqrt{12},\frac{3}{2}\sqrt{12}$ **)**	↗

M(-√12,-1.5√12), m(√12,1.5√12)

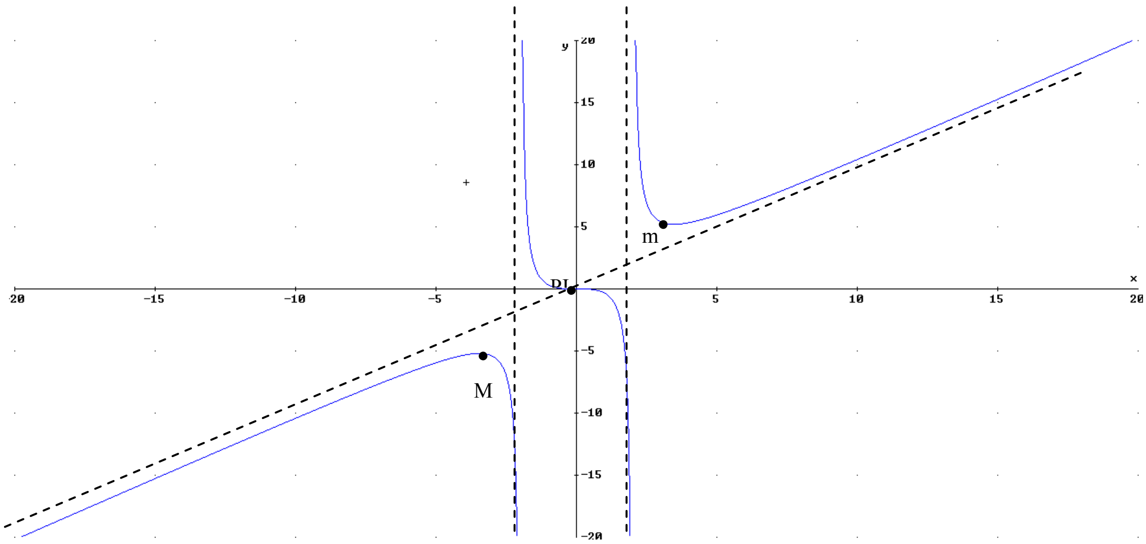
VII) <u>Segunda derivada, curvatura y Puntos de Inflexión:</u>

y=f´´(x)=$\dfrac{8x^5+64x^3-384x}{(x^2-4)^4}=\dfrac{8x(x^2+12)(x^2-4)}{(x^2-4)}$, f´´(x)=0 → x=0,-2, 2

Nota: Como $(x^2-4)^4$ es positivo sólo tenemos que estudiar el signo del numerador, por eso no simplificamos la fracción. El signo de la segunda derivada es:

Intervalo	(-∞,-2)	-2	(-2,0)	0	(0,2)	2	(2,∞)
Signo f ''(x)	-	∉	+	0	-	∉	+
	∩		∪	**PI(0,0)**	∩		∪

VIII: <u>Representación</u>



3) y=f(x)=$\ln(x^3-2x)$

I) <u>Dominio:</u>

x^3-2x>0 → x(x-2)(x+2)>0

Intervalo	(-∞,-$\sqrt{2}$)	-$\sqrt{2}$	(-$\sqrt{2}$,0)	0	(0, $\sqrt{2}$)	$\sqrt{2}$	($\sqrt{2}$,∞)
Signo x^3-4x	-	0	+	0	-	0	+
	No Dom	No Dom	Dom	No Dom	No Dom	No dom	Dom

Dom(f(x))=(-$\sqrt{2}$,0)∪($\sqrt{2}$,∞)

II) <u>Corte con los ejes:</u>

a) Corte con el eje OY (x=0$\notin$ Dom(f(x)))→ No corte eje OX

b) Corte con el eje OX (y=0) → f(x)= $\ln(x^3-2x)$ =0 →x^3-2x=1, x=-1,x=$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ los tres puntos pertenecen al dominio (comprobar con la calculadora)

P_c(-1,0), P_c($\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,0), P_c($\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$,0)

III) <u>Signo de la función</u>:

x=-$\sqrt{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ **,**-1**,**0, $\sqrt{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(-$\sqrt{2}$,$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$)	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	($\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, -1)	-1	(-1,0)	0	(0, $\sqrt{2}$)	$\sqrt{2}$	($\sqrt{2}$,$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,∞)
-	0	+	0	-	$\notin$	$\notin$	$\notin$	-	0	+
	P_c($\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,0)		P_c(-1,0)						P_c($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,0)	

IV) <u>Simetría y periodicidad</u>

a) No periódica

b) f(-x)=ln(-x^3+2x)≠f(x) y ≠-f(x)   No simétrica

V) <u>Asíntotas</u>

a) Vertical (donde se anula el logaritmo)→ **x=-$\sqrt{2}$, x=$\sqrt{2}$, x=0**

b) Horizontal $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\textit{no existe}$ No horizontal

c) Oblicua $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3x^2-2}{x^3-2x}}{1}=0$ No oblicua

VI) <u>Primera derivada, crecimiento, puntos relativos</u>

f´(x)= $\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x}$ → f´(x)=0, $3x^2$-2=0 → x=$\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ → -$\dfrac{\sqrt{6}}{3}\in$ Dom(f(x)), pero $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\notin$ Dom(f(x))

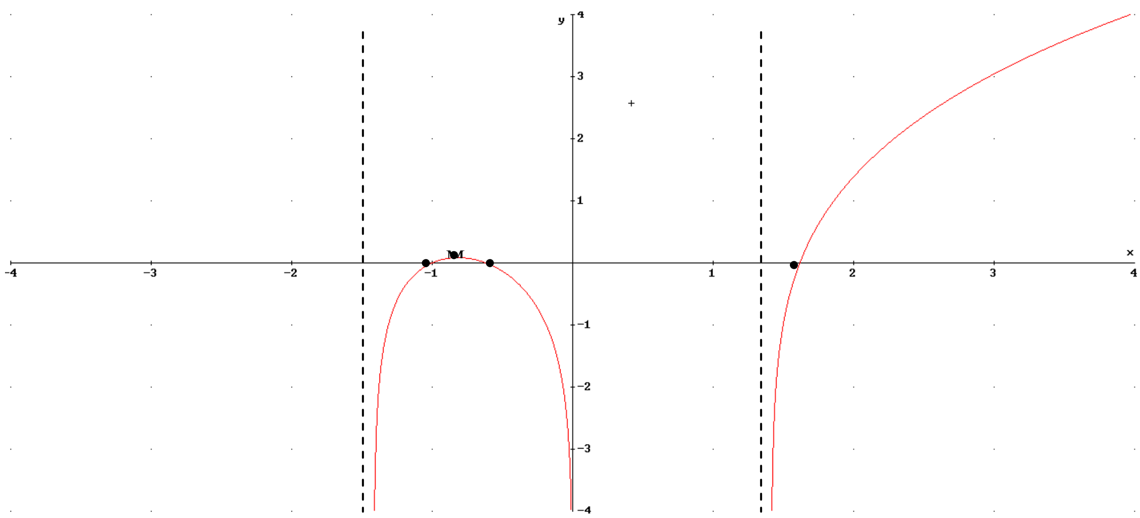
	$(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{6}}{3})$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$	0	$(\sqrt{2},\infty)$
Signo f'(x)	+	0	-	∉	+
Crecimiento	↗	$M(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\ln(27/32)}{2})$	↘		↗

VI) <u>Segunda derivada, curvatura y puntos de inflexión</u>

$f''(x)=-\frac{3x^4+4}{(x^3-2x)^2}$ → $3x^4+4=0$ No solución, no puntos de inflexión

	$(-\sqrt{2},0)$	0	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},\infty)$
Signo f''(x)	-	∉	∉	-
Curvatura	∩			∩

VII) Representación:



Ejercicios PAU

Septiembre 2006, Prueba A

PR-2.- a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=xe^{-x}$, sus máximos y mínimos relativos, asíntotas y puntos de inflexión. Demuéstrese que para todo x se tiene que $f(x)\leq 1/e$ **(2 puntos)**

b) Pruébese que la ecuación $e^x = 3x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$. **(1 punto)**

a) Dom(f(x))=R

1) Asíntotas:

No verticales

Horizontales: $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \infty\cdot\infty$

y=0 (sólo si x tiende a +∞)

Oblicua: no oblicua

2) Crecimiento, puntos relativos

$f'(x)=e^{-x}-x\cdot e^{-x} \rightarrow e^{-x}-x\cdot e^{-x}=0$ $e^{-x}(1-x)=0 \rightarrow x=1$

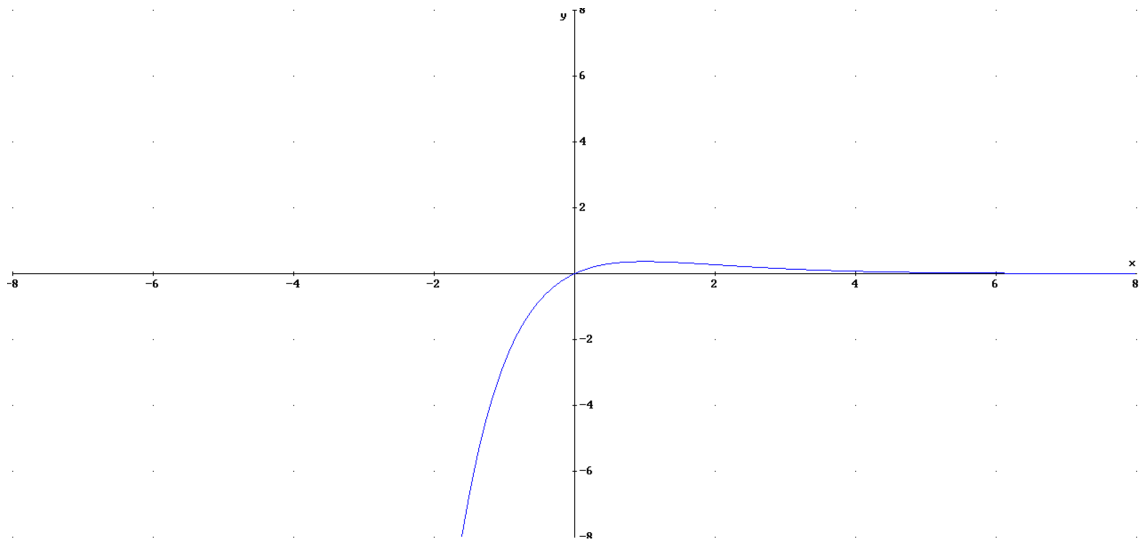
	(-∞,1)	1	(1,∞)
Signo f´(x)	+	0	-
Crecimiento	↗	$M(1,e^{-1})$	↘

3) Curvatura y Puntos de Inflexión

$f''(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(-2+x)\rightarrow e^{-x}(-2+x)=0 \rightarrow x=2$

	(-∞,2)	2	(2,∞)
Signo f´´(x)	-	0	+
Crecimiento	∩	$PI(2,2e^{-2})$	∪

4) Representación gráfica:



Vemos que el máximo absoluto es el máximo relativo $(1,e^{-1})$, luego $f(x) \leq e^{-1}$

b) $xe^{-x} = 3$ alguna solución en solución $(-\infty,1] \rightarrow g(x)=e^{x}-3x=0$

Aplicamos Bolzano:

· g(x) continua en $(-\infty,1]$

· $g(1)=e-3<0$, $g(0)=1>0$

Luego $\exists c \in (0,1): g(c) = 0$

Veamos que sólo hay una: $g'(x)=e^{x}-3 \rightarrow e^{x}=3 \rightarrow x=\ln(3)=1,1$

	$(-\infty,\ln 3)$	ln3	$(\ln 3,\infty)$
Signo g´(x)	-	0	+
Crecimiento	↘	m(ln3,-0,3)	↗

Luego entre $(-\infty,1.1)$ la función decrece cortando en un único punto c en el eje OX.

Septiembre 2006. Prueba B

PR-2. Sea f(x)=$\frac{4-2x^2}{x}$

a) Determínese el dominio de *f*, sus asíntotas, simetrías y máximos y mínimos relativos. Esbócese su gráfica. **(1,75 puntos)**

1) Dom(f(x))=R-{0}

2) Asíntotas: Vertical **x=0**

Horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x}=-\infty \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4-2x^2}{x}=\infty$

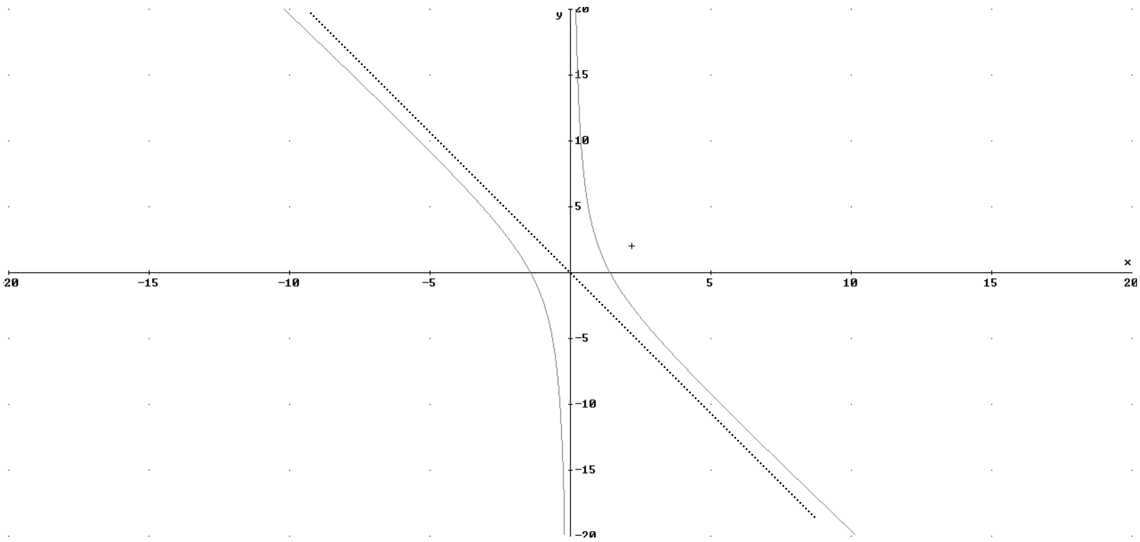
Oblicua: m=$\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x^2}=-2$ n=$\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x}+2x=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$ **y=-2x**

3) Simetrías: f(-x)= $\frac{4-2x^2}{-x}=-f(-x)$ Simetría Impar (respecto al origen)

4) Monotonía y puntos reltaivos

f´(x)= $-2\frac{(x^2+2)}{x^2}$<0 Siempre decreciente. No puntos relativos

5) Representación



Junio 2006. Prueba B

PR-2.- Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, se pide:

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas de *f*. Esbócese su gráfica. **(2 puntos)**

1) Dominio → Dom(f(x))=R-{-1}.

2) Asíntotas → AV: **x=-1**

AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ **y=1**

AO: No al tener horizontal

3) Crecimiento y puntos relativos:

f´(x)=$\frac{2}{(x+1)^2}$>0 Siempre crece no puntos relativos

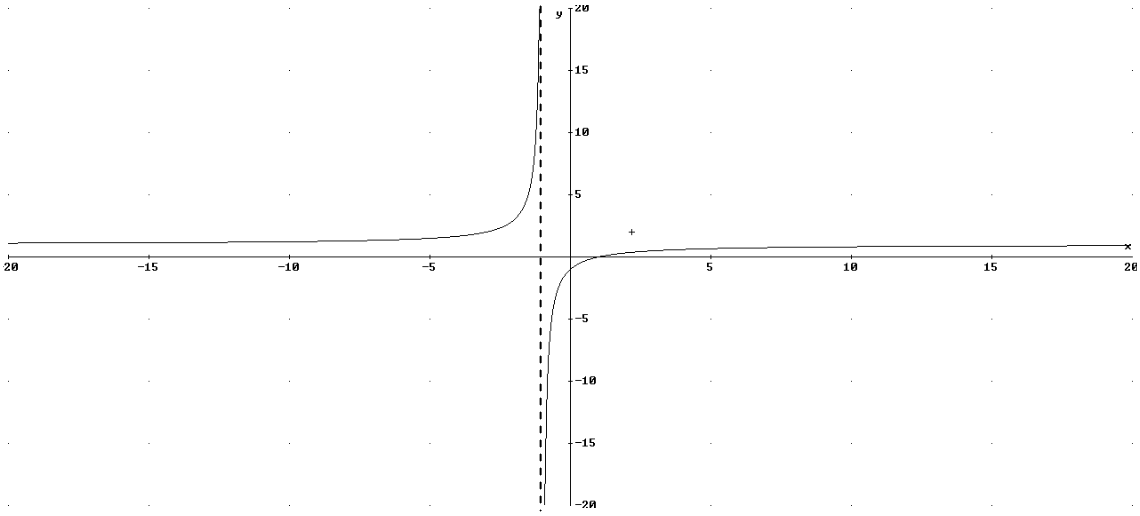
Intervalo	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f´(x)	+	∉	+
Crecimiento	↗		↗

4) Curvatura y P.I.:

f ´´(x)=$-4\frac{(x+1)}{(x+1)^4}$

	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	∉	-
Curvatura	∪		∩

No P.I.



Septiembre 2005. Prueba A

PR-2.- a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x>0\\ x^2, & x\le 0\end{cases}$, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

a) Continuidad: $\ln(1+x^2)$, x^2 es continua en R . Veamos en x=0

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ln(1)=0\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0^2=0\end{array}\right\}$$ f(0)=0 → Continua. Luego podemos hacer la derivada de la función:

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2}, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0\\ f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0\end{array}\right\}$$ Derivable

I) Crecimiento: igualamos la derivada a cero (cada uno de sus trozos)

· $\dfrac{2x}{1+x^2}$ =0→ x=0∉ (0,∞)

· 2x=0 →x=0∈ (-∞,0].

Luego el único punto donde f´(x)=0 es x=0

	(-∞,0)	0	(0,∞)
Signo f´(x)	-	0	+
Crecimiento	↘	m(0,0)	↗

2) Curvatura: como f(x) es derivable en R podemos calcular la segundad derivada

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, & x>0\\ 2 & \text{x} \leq 0\end{cases}$$

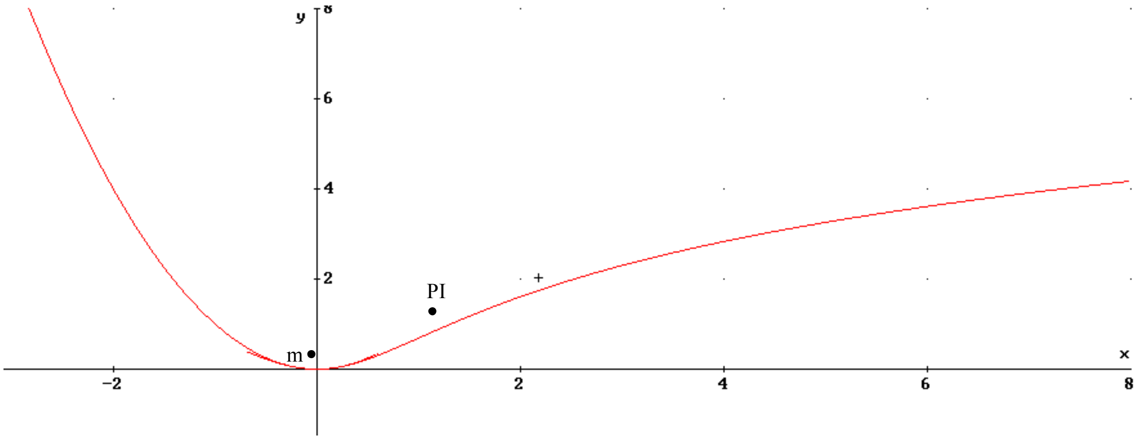
f''(x)=0, miremos los dos trozos de definición

· $\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$=0 x=1,-1, solo x=1 es mayor que cero

· 2≠0

En los intervalos tenemos que considerar x=0 (donde cambia la expresión analítica):

Intervalo	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo f''(x)	+	2	+	0	-
Curvatura	∪	∪	∪	PI(1,ln2)	∩



Junio 2005. Prueba A

PR-2.- a) Calcúlense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. **(2 puntos)**

b) Esbócese la gráfica de f **(1 punto)**

a) 1) Dom(f(x))=R

2) Asíntotas: · No verticales.

· Horizontales: $\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2}=e^{-\infty}=0$, $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x^2}=e^{-\infty}=0$

y=0 (cuando x→∞ y x→-∞)

· No oblicuas al tener horizontal

3) Crecimiento y puntos relativos

$f'(x)=-2x{\cdot}e^{1-x^2}$ =0→x=0

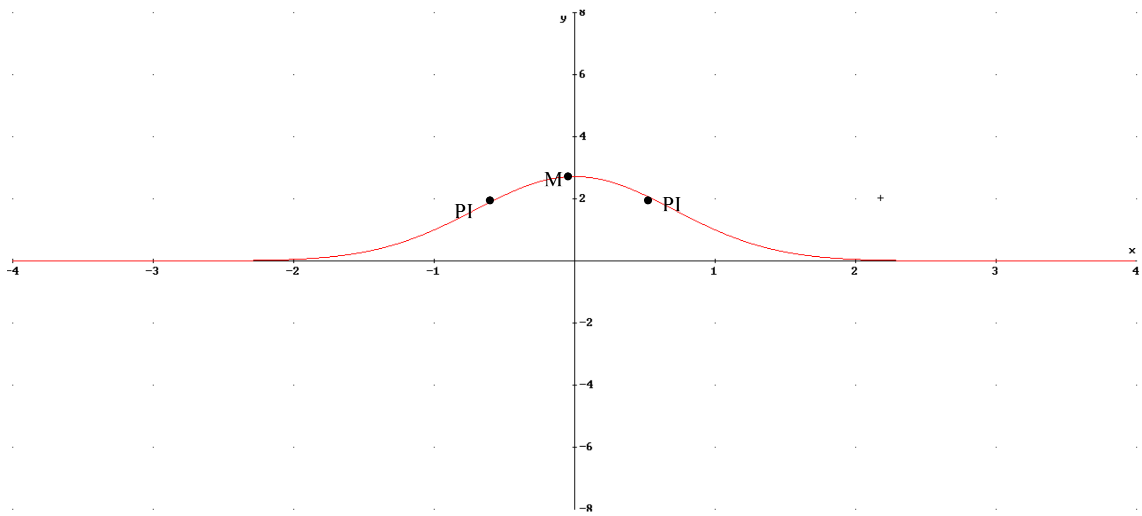
Intervalos	(-∞,0)	0	(0,∞)
Signo f'(x)	+	0	-
Crecimiento	↗	**M(0,e)**	↘

4) Curvatura:

$f''(x)=-2{\cdot}e^{1-x^2}+4x^2e^{1-x^2}=e^{1-x^2}(4x^2-2)$ x=$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Intervalo	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty)$
Signo f''(x)	+	0	-	0	+
Curvatura	∪	PI($-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}$)	∩	PI($\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}$)	∪

b) Representación gráfica



Septiembre 2004-Prueba A

PR-2 Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2, \quad x \in R.$

a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.

b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.

c) Esbócese la gráfica de f.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si \ \ x > 0 \\ x^2 + 3x + 2 & si \ \ x \leq 0 \end{cases}$

Continuidad → Sólo tenemos que estudiar la continuidad en x=0 ya que en los demás puntos es continua al ser los dos trozos polinomios

$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \end{cases}$ f(0)=2. Continua

Derivabilidad → al ser continua podemos definir la función f´(x)= $\begin{cases} 2x - 3 & si \ \ x > 0 \\ 2x + 3 & six \leq 0 \end{cases}$

Que es derivable en todos los puntos menos en x=0, que debemos estudiar si lo es:

$f'(0^+)=-3$; $f'(0^-)=3$ → No derivable (como ocurre en las funciones valor absoluto)

Luego al representar la gráfica en x=0 tendrá un “pico”

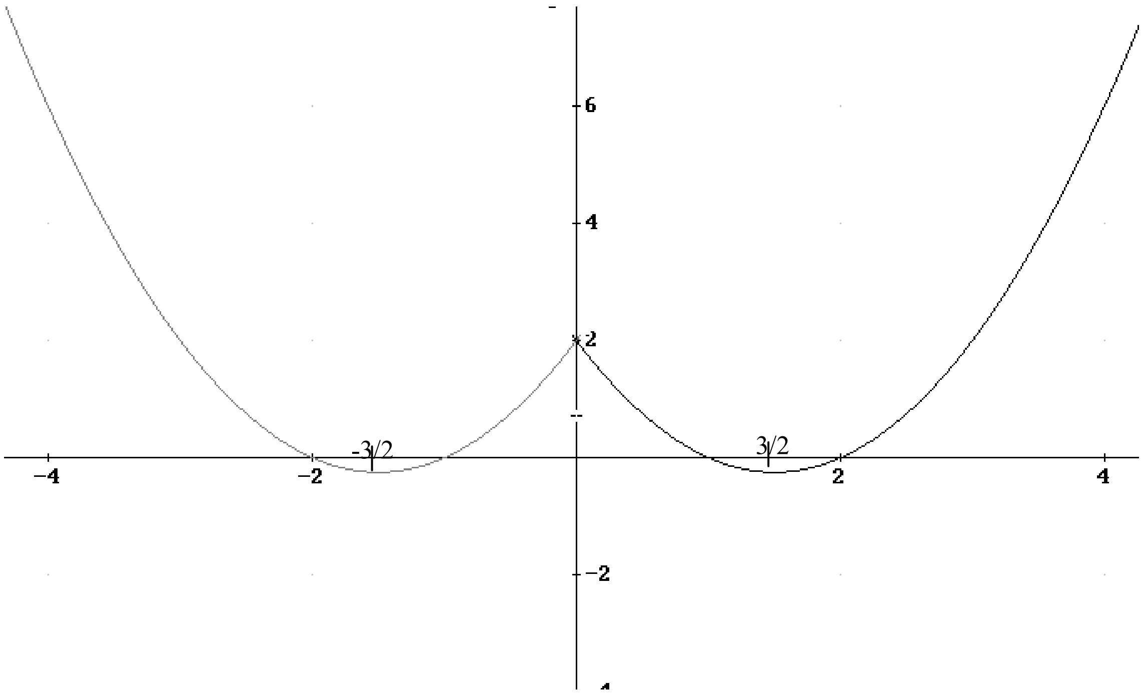
b) Crecimiento de la función → f´(x)=0: $\begin{cases} 2x - 3 = 0 \ \ x = \frac{3}{2} > 0 \ \ solución \\ 2x + 3 = 0 \ \ x = \frac{-3}{2} < 0 \ \ solución \end{cases}$.

A estos dos puntos 3/2 y -3/2 tenemos que añadir x=0 donde f(x) cambia de expresión analítica.

Intervalo	(-∞,-3/2)	-3/2	(-3/2,0)	0	(0,3/2)	3/2	(3/2,∞)
Signo f´(x)	-	0	+	No derivable	-	0	+
Crecimiento	↘	m(-3/2,-1/4)	↗		↘	m(3/2,-1/4)	↗

El punto (0,2) es un punto donde hay un cambio de pendiente, por eso no es derivable. El cambio de pendiente es tal que pasa de ser una función decreciente a creciente. Luego es como un mínimo relativo.

c) Podemos representarlo viendo que son dos parábolas (x^2-3x+2 si x>0 y x^2+3x+2 si x<0) o partir de las informaciones anteriores.



Junio 2004- Prueba A

PR-1.- Sea la función $y = 2e^{-2|x|}$.

a) Estúdiese su monotonía, extremos relativos y asíntotas.

$$y = f(x) = 2e^{-2|x|}\begin{cases} 2e^{2x} & si \;\; x<0 \\ 2e^{-2x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Veamos primero si es continua para poder derivar la función a trozos:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2\cdot e^0 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2\cdot e^0 = 2 \end{cases} \quad \text{f(0)=2} \rightarrow \text{continua}$$

$f'(x) = \begin{cases} 4e^{2x} & si \;\; x<0 \\ -4e^{-2x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$. Veamos si derivable f'(0^+)=4≠f'(0^-)=-4. No derivable en x=0, luego en x=0 habrá un "pico".

Veamos donde se anula la derivada: f'(x)=0 →

$$4e^{2x} = 0 \;\; no \;\; solución$$
$$-4e^{.2x} = 0 \;\; no \;\; solución$$

Luego el único punto característico a la hora de estudiar monotonía es x=0, que es donde la función cambia de expresión analítica

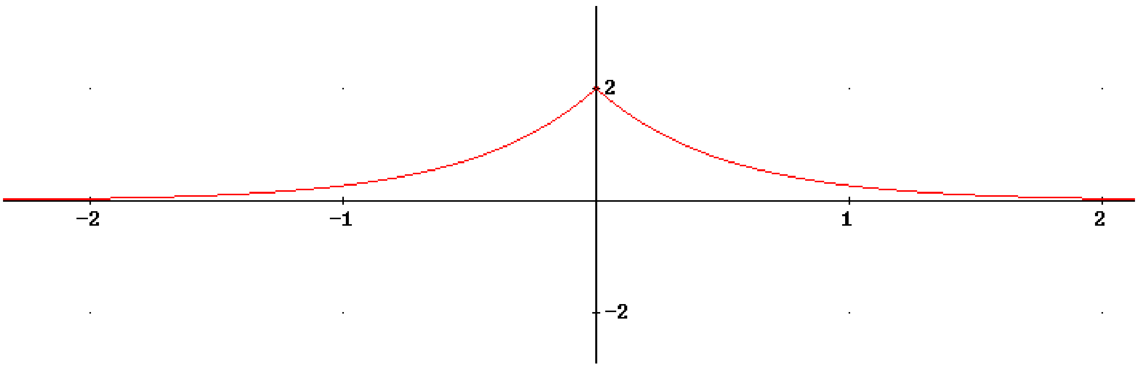
Intervalo	(-∞,0)	0	(0,∞)
Signo f'(x)	+		-
Crecimiento	↗		↘

El punto (0,2) es un punto donde hay un cambio de pendiente, por eso no es derivable. El cambio de pendiente es tal que pasa de ser una función creciente a decreciente. Luego es como un máximo relativo.

Asíntotas:

1) Verticales → no tiene

2) Horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2e^{-\infty} = 2\cdot 0 = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2e^{-\infty} = 2\cdot 0 = 0$. Luego tiene asíntota horizontal **y=0 (cuando x→∞ y x→-∞)**



Junio 2007- Prueba A

PR-2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

1) Domino=R-{-1,1}

2) Asíntotas:

AV: x=1, x=-1

AH: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ → y=0 (cuando x→∞ y x→-∞)

AO: No tiene

3) Crecimiento y puntos relativos

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ → f´(x)=0 No solución. Los únicos puntos representativos para estudiar la monotonía son x=1, x=-1 (asíntotas verticales)

Intervalos	(-∞,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
Signo(f´(x))	-	∉ Dom(f(x))	-	∉ Dom(f(x))	-
Monotonía	↘		↘		↘

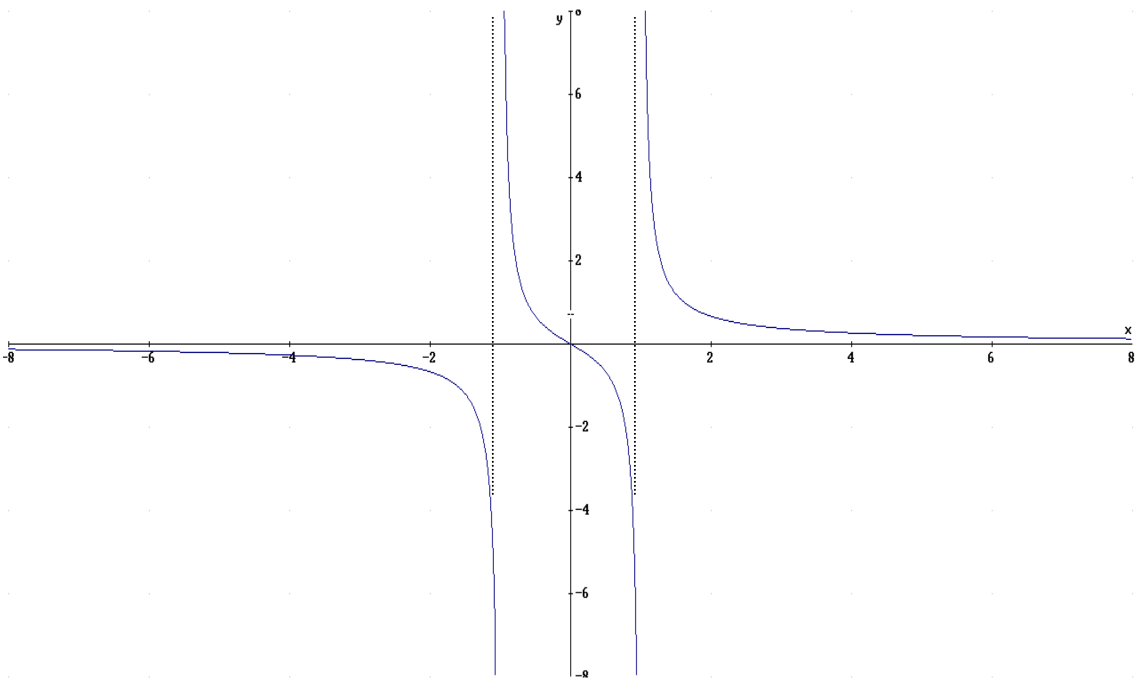
4) Curvatura y puntos de inflexión

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-1)^2-4x(x^2-1)\cdot(x^2+1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2x^2-2)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)\cdot(-x^2-3)}{(x-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)^4}$$

f´´(x)=0 → x=0, x=1, x=-1. Pero x=1 y x=-1 no pertenece al dominio

Intervalo	(-∞,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(f'(x))	-	∉ Dom(f(x))	+	0	-	∉ Dom(f(x))	+
Curvatura	∩		∪	PI(0,0)	∩		∪

5) Representación gráfica



Junio 2006- Prueba B

PR-2. $f(x)=x+e^{-x}$ Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica

1) Dom(f(x))=R

2) Asíntotas:

· *Vertical*: no tiene

· *Horizontal*: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty+e^{-\infty}=\infty+0=\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+e^{\infty}=-\infty+\infty \underset{ya\ que\ \exp onente\ crece\ mucho\ mas\ rapido}{=} \infty$$

No asíntota horizontal

· *Oblicua*: m=$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=1+\frac{0}{\infty}=1$

n=$\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty} e^{-x}=e^{-\infty}=0$

Veamos si x→-∞

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=1+\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=1-e^{\infty}=1-\infty=-\infty$$

Luego la asíntota es **y=x (solo si x→∞)**

3) Crecimiento y puntos relativos:

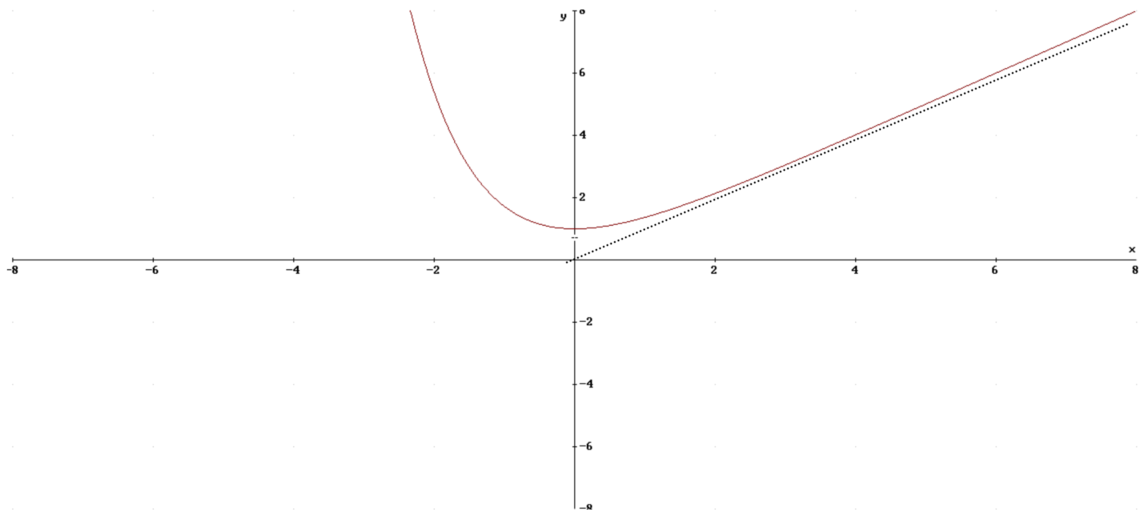
$f'(x)=1-e^{-x}$ → $f'(x)=0$ → $1-e^{-x}=0$; $e^{-x}=1$ → $-x=\ln(1)=0$ → $x=0$

Intervalo	(-∞,-0)	0	(0,∞)
Signo(f´(x))	-	0	+
Monotonía	↘	m(0,1)	↗

4) Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=e^{-x}$ → $f''(x)=0$ no solución pues e^{x} siempre positivo

Intervalo	(-∞,∞)
Signo(f’’(x))	+
Curvatura	∪



Junio 2005- Prueba B

PR-2.- Sea $f(x) = e^x + \ln(x)$, $x \in (0,\infty)$.

a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* y sus asíntotas. **(1,5pto)**

b) Pruébese que *f* tiene un punto de inflexión en el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ y esbócese la gráfica de *f*. **(1,5 puntos)**

a) Veamos primero el Dominio, que es necesario para el resto de cálculos

1) Dom(f(x))=$(0,\infty)$
2) Monotonía : $f'(x)=e^x+1/x=0 \rightarrow e^x=-1/x$, que en el dominio no tiene solución pues para x>0 el exponente es positivo y –1/x negativo. En el domino f´(x)>0, y por tanto la función creciente en todos los puntos del dominio es decir en $(0,\infty)$.
3) Asíntotas:

· Verticales en x=0 (se anula el logaritmo)

· Horizontales $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty + 0 = \infty$. No horizontales

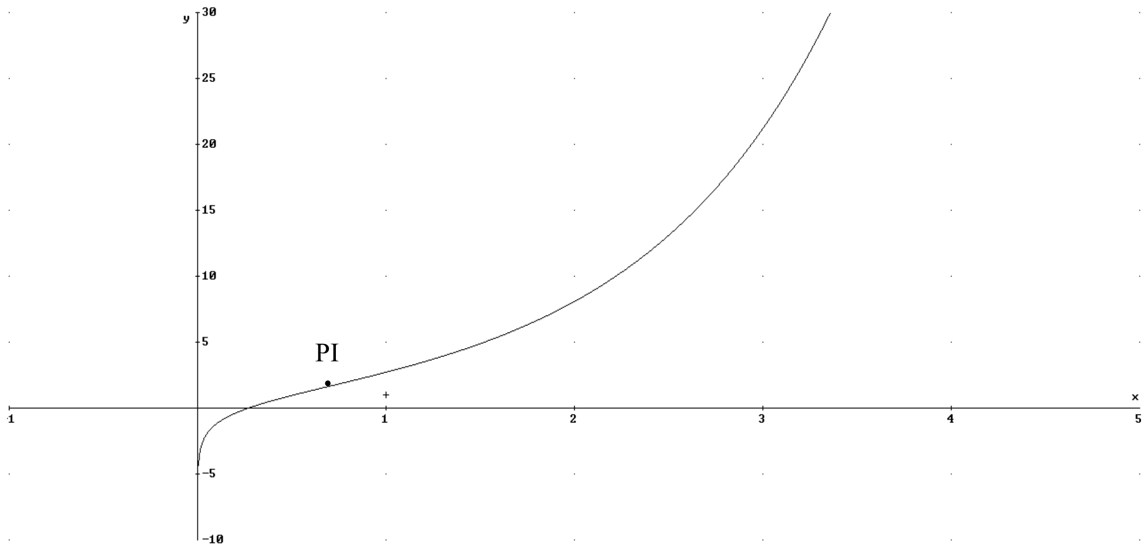
· Oblicuas m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} + 0 \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} + 0 = \infty$.No

b) $f''(x)=e^x-1/x^2$. Veamos que en el intervalo [1/2,1] se anula f´´(x), para eso aplicamos Bolzano a la función f´´(x):

· f´´(x) es continua en [1/2,1], ya que 0 no pertenece a este intervalo

· f´´(1/2)<0; f´´(1)>0

Luego al cumplir Bolzano existe un punto $c\in(1/2,1)$ tal que f´´(c)=0.



Junio 2008. Prueba A

PR-2 Sea $f(x)=\ln(x)/x^2$ siendo $x\in(0,\infty)$. Se pide

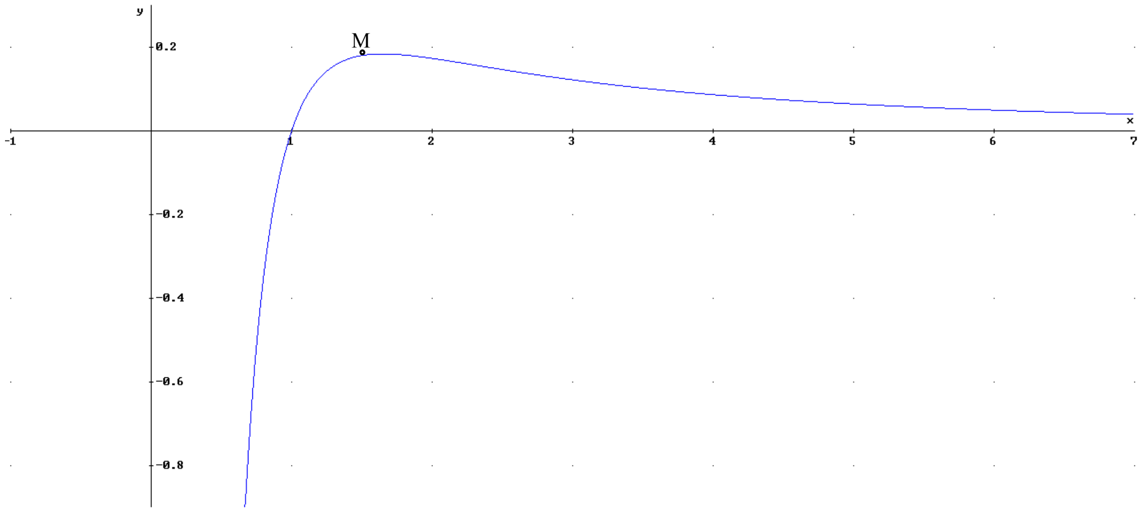
a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar la gráfica.

1) Dominio: nos lo da el problema: $Dom(f(x))=(0,\infty)$
2) Asíntotas:
   · Verticales: en x=0, pues se anula el denominador y el logaritmo.
   · Horizontales $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x} = 0$ Asíntota y=0 (sólo si $x\rightarrow\infty$)
   · Oblicuas: no al tener horizontales
3) Crecimiento y extremos relativos:
   $f'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}=0 \rightarrow \ln(x)=1/2 \rightarrow x=e^{1/2}$

Intervalo	$(0,e^{1/2})$	$e^{1/2}$	$(e^{1/2},\infty)$
Signo(f´(x))	+	0	-
Monotonía	$\nearrow$	$M(e^{1/2},1/2e)$	$\searrow$

Luego f(x) crece en $(e^{1/2},\infty)$ y decrece en $(0,e^{1/2})$. En el punto $M(e^{1/2},1/2e)$ hay un máximo relativo.

Veamos la gráfica:



Septiembre 2008. Prueba B

PR-2.- Sea f (x) = 2 –x + ln x con x∈(0,+∞).

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f . Esbozar la gráfica de f .

b) Probar que existe un punto c∈(1/e^2,1) tal que f (c) = 0 .

a) Primero veamos el dominio:

1) Dominio: Dom(f(x))=(0,∞)

2) Asíntotas:

· Verticales: en x=0 (se anula el logaritmo)

· Horizontales $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2 - x + \ln(x) = 2 - \infty + \infty = \infty$. No tiene

· Oblicua m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-x+\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{1} = -1$

n= $\lim_{x\to\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\infty} 2 + \ln(x) = \infty$. No oblicua

3) Extremos relativos:

f´(x)=-1+1/x=0 → x=1.

Intervalo	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(f´(x))	+	0	-
Monotonía	↗	M(1,1)	↘

Crece en (0,1) y decrece en (1,∞). En el punto M(1,1) hay un máximo relativo

4) Curvatura:

   $f''(x)=-1/x^2=0 \rightarrow$ Nunca se anula $f''(x)<0$ luego siempre es cóncava hacia abajo $\cap$