

# Definición de derivada

## Ejercicio nº 1.-

Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo  $[1, 2]$  e indica

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

## Ejercicio nº 2.-

Calcula, utilizando la definición de derivada,  $f'(1)$  para la función  $f(x) = \frac{x-1}{3}$ .

## Ejercicio nº 3.-

Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(x)$  para la función  $f(x) = \frac{x+1}{3}$ .

## Ejercicio nº 4.-

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$

b)  $f(x) = e^x$

## Ejercicio nº 5.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$

b)  $f(x) = xe^x$

## Ejercicio nº 6.-

Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{4x^3 + 1}$$

## Ejercicio nº 7.-

Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Halla la tasa de variación media en el intervalo  $[0, 2]$  e indica si  $f(x)$  crece o decrece en ese intervalo.

## Ejercicio nº 8.-

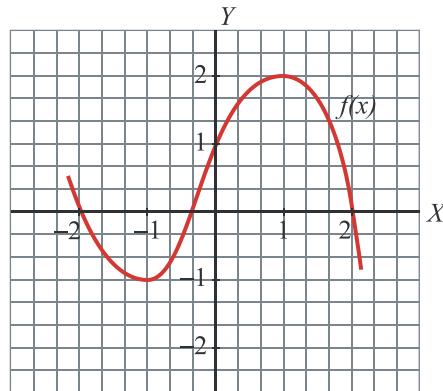
a) Calcula la tasa de variación media de la función  $f(x) = \frac{3}{x}$  en el intervalo  $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

**Ejercicio nº 9.-**

Calcula la tasa de variación media de esta función,  $f(x)$ , en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

- a)  $[-1, 0]$
- b)  $[1, 2]$



**Ejercicio nº 10.-**

Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(-1)$ , siendo  $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ .

**Ejercicio nº 11.-**

Aplicando la definición de derivada, calcula  $f'(1)$ , siendo  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

**Ejercicio nº 12.-**

Calcula, utilizando la definición de derivada,  $f'(1)$  para la función  $f(x) = \frac{x-1}{3}$ .

**Ejercicio nº 13.-**

Halla la derivada de la función  $f(x) = (x-1)^2$  en  $x = 2$ , aplicando la definición de derivada.

**Ejercicio nº 14.-**

Halla la derivada de la siguiente función en  $x = 1$ , aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

**Ejercicio nº 15.-**

Halla la derivada de la función  $f(x) = 2x^2$ , aplicando la definición de derivada

**Ejercicio nº 16.-**

Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(x)$  para la función  $f(x) = \frac{x+1}{3}$ .

**Ejercicio nº 17.-**

Halla  $f'(x)$ , aplicando la definición de derivada, siendo  $f(x) = x^2 + 1$ .

**Ejercicio nº 18.-**

Aplicando la definición de derivada calcula  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

## **Cálculo de derivadas**

**Ejercicio nº 19.-**

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

b)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

**Ejercicio nº 20.-**

Calcula la función derivada de:

a)  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

b)  $f(x) = \ln x$

**Ejercicio nº 21.-**

Halla la derivada de:

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{5}$

b)  $f(x) = \cos x$

**Ejercicio nº 22.-**

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$

b)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

**Ejercicio nº 23.-**

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$

b)  $f(x) = e^x$

**Ejercicio nº 24.-**

Calcula  $f'(x)$  en cada caso:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{2x+3}$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x$

**Ejercicio nº 25.-**

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 3}$

b)  $f(x) = x \ln x$

**Ejercicio nº 26.-**

Calcula la derivada de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 2}$

b)  $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

**Ejercicio nº 27.-**

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$

b)  $f(x) = xe^x$

**Ejercicio nº 28.-**

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b)  $f(x) = \frac{3x + 1}{e^x}$

**Ejercicio nº 29.-**

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b)  $f(x) = \frac{3x + 1}{e^x}$

**Ejercicio nº 30.-**

Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{4x^3 + 1}$$

**Ejercicio nº 31.-**

Halla la función derivada de:

$$f(x) = (3x^2 + x)^4$$

**Ejercicio nº 32.-**

Halla  $f'(x)$  para la función:

$$f(x) = e^{4x^3 - 2x}$$

**Ejercicio nº 33.-**

Calcula la función derivada de:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

## **Aplicaciones de la derivada**

**Ejercicio nº 34.-**

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 2x^2 - 3x$  que tenga pendiente  $-7$ .

**Ejercicio nº 35.-**

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \sqrt{x}$  que sea paralela a la recta  $y = \frac{1}{4}x + 1$

**Ejercicio nº 36.-**

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^2 + 2x - 1$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

**Ejercicio nº 37.-**

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^3 - 2x$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

**Ejercicio nº 38.-**

Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva  $y = 3x^2 + x - 1$ .

**Ejercicio nº 39.-**

Averigua los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$$

**Ejercicio nº 40.-**

Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

**Ejercicio nº 41.-**

Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

**Ejercicio nº 42.-**

Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

**Ejercicio nº 43.-**

Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

**Ejercicio nº 44.-**

Dada la función:

$$f(x) = 2x^3$$

determina los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

**Ejercicio nº 45.-**

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

**Ejercicio nº 46.-**

Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$f(x) = 3 + 12x - 3x^2$$

**Ejercicio nº 47.-**

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$$

**Ejercicio nº 48.-**

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$f(x) = (x+2)^2$$

# SOLUCIONES

## Definición de derivada

### Ejercicio nº 1.-

Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo [1, 2] e indica

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

**Solución:**

$$T.V.M.[1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 - (-1)}{1} = \frac{(2+1)}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en el intervalo [1, 2].

### Ejercicio nº 2.-

Calcula, utilizando la definición de derivada,  $f'(1)$  para la función  $f(x) = \frac{x-1}{3}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+h-1}{3} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### Ejercicio nº 3.-

Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(x)$  para la función  $f(x) = \frac{x+1}{3}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{(x+1)}{3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{3h} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 4.-**

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$

b)  $f(x) = e^x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 12x^3 - 2$

b)  $f'(x) = e^x$

**Ejercicio nº 5.-**

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$

b)  $f(x) = xe^x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{2x(2x+1) - (x^2 + 2) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2}$

b)  $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

**Ejercicio nº 6.-**

Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{4x^3 + 1}$$

**Solución:**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 1}}$$

**Ejercicio nº 7.-**

Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Halla la tasa de variación media en el intervalo  $[0, 2]$  e indica si  $f(x)$  crece o decrece en ese intervalo.



**Solución:**

$$\text{T.V.M. } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función crece en ese intervalo.

**Ejercicio nº 8.-**

a) Calcula la tasa de variación media de la función  $f(x) = \frac{3}{x}$  en el intervalo  $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

**Solución:**

$$\text{a) T.V.M. } [-3, -1] = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{-3 - (-1)}{-1 + 3} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

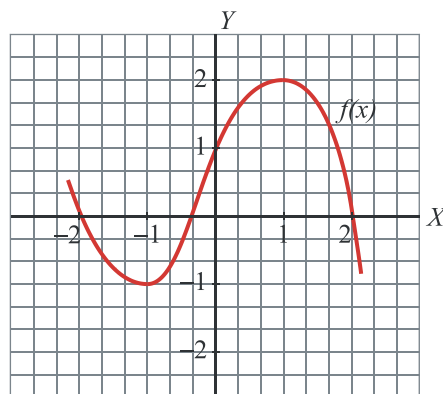
b) Como la tasa de variación media es negativa, la función es decreciente en el intervalo dado.

**Ejercicio nº 9.-**

Calcula la tasa de variación media de esta función,  $f(x)$ , en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

a)  $[-1, 0]$

b)  $[1, 2]$



**Solución:**

$$\text{a) T.V.M. } [-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en  $[-1, 0]$ . (También se puede apreciar directamente en la gráfica).

$$\text{b) T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 2}{1} = -2$$

La función decrece en este intervalo.

**Ejercicio nº 10.-**

Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(-1)$ , siendo  $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3(-1+h)+1}{2} - \frac{-2}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3+3h+1}{2} + \frac{2}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3+3h+1+2}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{2h} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 11.-**

Aplicando la definición de derivada, calcula  $f'(1)$ , siendo  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2(1+h)}{(1+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2-2h}{(1+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{(1+h)h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(1+h)} = \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 12.-**

Calcula, utilizando la definición de derivada,  $f'(1)$  para la función  $f(x) = \frac{x-1}{3}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+h-1}{3} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 13.-**

Halla la derivada de la función  $f(x) = (x-1)^2$  en  $x = 2$ , aplicando la definición de derivada.

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h-1)^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 1 + 2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 14.-**

Halla la derivada de la siguiente función en  $x = 1$ , aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 + 2h + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 15.-**

Halla la derivada de la función  $f(x) = 2x^2$ , aplicando la definición de derivada

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + h^2 + 2xh) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4xh - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h + 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x) = 4x \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 16.-**

Utilizando la definición de derivada, calcula  $f'(x)$  para la función  $f(x) = \frac{x+1}{3}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{(x+1)}{3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{3h} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 17.-**

Halla  $f'(x)$ , aplicando la definición de derivada, siendo  $f(x) = x^2 + 1$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 18.-**

Aplicando la definición de derivada calcula  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

# Cálculo de derivadas

## Ejercicio nº 19.-

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

b)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 12x^2 - 6x$

b)  $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

## Ejercicio nº 20.-

Calcula la función derivada de:

a)  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

b)  $f(x) = \ln x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 6x^2 - 2x$

b)  $f'(x) = \frac{1}{x}$

## Ejercicio nº 21.-

Halla la derivada de:

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{5}$

b)  $f(x) = \cos x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b)  $f'(x) = -\operatorname{sen} x$

## Ejercicio nº 22.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$

b)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 10x^4 + \frac{1}{3}$

b)  $f'(x) = \cos x$

**Ejercicio nº 23.-**

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$

b)  $f(x) = e^x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 12x^3 - 2$

b)  $f'(x) = e^x$

**Ejercicio nº 24.-**

Calcula  $f'(x)$  en cada caso:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{2x+3}$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{6x(2x+3) - 3x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{12x^2 + 18x - 6x^2}{(2x+3)^2} = \frac{6x^2 + 18x}{(2x+3)^2}$

b)  $f'(x) = x^{1/3} \cdot \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \operatorname{sen} x + x^{1/3} \cdot \cos x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$$

**Ejercicio nº 25.-**

Halla la función derivada de:

a)  $f(x) = \frac{1-x^2}{x-3}$

b)  $f(x) = x \ln x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{-2x(x-3) - (1-x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 1 + x^2}{(x-3)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2}$

b)  $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

**Ejercicio nº 26.-**

Calcula la derivada de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2}$

b)  $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{3(x^2-2) - (3x-1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{3x^2-6-6x^2+2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2}$

b)  $f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

**Ejercicio nº 27.-**

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$

b)  $f(x) = xe^x$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{2x(2x+1) - (x^2+2) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

b)  $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

**Ejercicio nº 28.-**

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b)  $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

b)  $f'(x) = \frac{3e^x - (3x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2} = \frac{2-3x}{e^x}$

**Ejercicio nº 29.-**

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b)  $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$

**Solución:**

a)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

b)  $f'(x) = \frac{3e^x - (3x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2} = \frac{2-3x}{e^x}$

**Ejercicio nº 30.-**

Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{4x^3 + 1}$$

**Solución:**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 1}}$$

**Ejercicio nº 31.-**

Halla la función derivada de:

$$f(x) = (3x^2 + x)^4$$

**Solución:**

$$f'(x) = 4(3x^2 + x)^3 \cdot (6x + 1)$$

**Ejercicio nº 32.-**

Halla  $f'(x)$  para la función:

$$f(x) = e^{4x^3 - 2x}$$

**Solución:**

$$f'(x) = e^{4x^3 - 2x} \cdot (12x^2 - 2)$$



### Ejercicio nº 33.-

Calcula la función derivada de:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x-3) - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \\ &= \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \end{aligned}$$

## Aplicaciones de la derivada

### Ejercicio nº 34.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 2x^2 - 3x$  que tenga pendiente  $-7$ .

**Solución:**

- $y' = 4x - 3$
- La pendiente de la recta es  $y' = -7 \Rightarrow 4x - 3 = -7 \Rightarrow x = -1$
- Cuando  $x = -1$ ,  $y = 5$ .
- La recta será:

$$y = 5 - 7(x+1) = 5 - 7x - 7 = -7x - 2$$

### Ejercicio nº 35.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \sqrt{x}$  que sea paralela a la recta  $y = \frac{1}{4}x + 1$

**Solución:**

- $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- La pendiente de la recta es  $y' = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$
- Cuando  $x = 4$ ,  $y = 2$
- La recta será:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = 2 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{4}x + 1$$

### Ejercicio nº 36.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^2 + 2x - 1$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

**Solución:**

- $y' = 2x + 2$
- La pendiente de la recta es  $y'(1) = 4$ .
- Cuando  $x = 1$ ,  $y = 2$
- La recta será:

$$y = 2 + 4(x - 1) = 2 + 4x - 4 = 4x - 2$$

**Ejercicio nº 37.-**

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^3 - 2x$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

**Solución:**

- $y' = 3x^2 - 2$
- La pendiente de la recta es  $y'(2) = 10$ .
- Cuando  $x = 2$ ,  $y = 4$ .
- La ecuación de la recta será:

$$y = 4 + 10(x - 2) = 4 + 10x - 20 = 10x - 16$$

**Ejercicio nº 38.-**

Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva  $y = 3x^2 + x - 1$ .

**Solución:**

- $y' = 6x + 1$
- La pendiente de la recta es  $y' = 7 \Rightarrow 6x + 1 = 7 \Rightarrow x = 1$
- Cuando  $x = 1$ ,  $y = 3$ .
- La ecuación de la recta será:

$$y = 3 + 7(x - 1) = 3 + 7x - 7 = 7x - 4$$

**Ejercicio nº 39.-**

Averigua los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$$

**Solución:**

$$\bullet f'(x) = \frac{-2x(x+2) - (3-x^2)}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 3 + x^2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Punto } (-1, 2) \\ x = -3 \rightarrow \text{Punto } (-3, 6) \end{cases}$$

**Ejercicio nº 40.-**

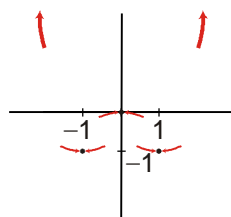
Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

**Solución:**

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Punto } (-1, -1) \\ x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \rightarrow \text{Punto } (1, -1) \end{cases}$
- Hallamos las ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty$$



Mínimo en  $(-1, -1)$  y en  $(1, -1)$ ; máximo en  $(0, 0)$

**Ejercicio nº 41.-**

Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

**Solución:**

- $f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x+6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = -3 \rightarrow \text{Punto } (-3, 27) \end{cases}$

**Ejercicio nº 42.-**

Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

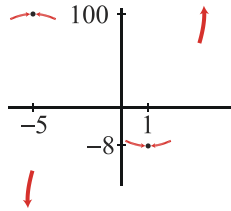
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

**Solución:**

- $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} x=1 \rightarrow \text{Punto}(1, -8) \\ x=-5 \rightarrow \text{Punto}(-5, 100) \end{cases}$$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 6x^2 - 15x) = +\infty$        $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 6x^2 - 15x) = -\infty$



Máximo en  $(-5, 100)$  y mínimo en  $(1, -8)$ .

**Ejercicio nº 43.-**

Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

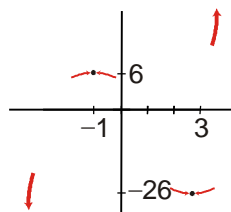
$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

**Solución:**

•  $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$   
 $= \frac{2 \pm 4}{2}$        $x=3 \rightarrow \text{Punto}(3, -26)$   
 $x=-1 \rightarrow \text{Punto}(-1, 6)$

• Hallamos las ramas infinitas para saber si son máximos o mínimos:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x + 1) = +\infty$        $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x + 1) = -\infty$



Máximo en  $(-1, 6)$  y mínimo en  $(3, -26)$ .

**Ejercicio nº 44.-**

Dada la función:

$$f(x) = 2x^3$$

determina los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

**Solución:**

- $f'(x) = 6x^2$
- Como  $f'(x) \geq 0$  la función es creciente

**Ejercicio nº 45.-**

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

**Solución:**

- $f'(x) = 6x - 2$
- Estudiamos el signo de la derivada:  
 $6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$   
 $6x - 2 > 0 \Rightarrow 6x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{6} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$   
 $6x - 2 < 0 \Rightarrow 6x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$
- La función decrece en  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ , crece en  $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$  (y tiene un mínimo en  $x = \frac{1}{3}$ ).

**Ejercicio nº 46.-**

Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$f(x) = 3 + 12x - 3x^2$$

**Solución:**

- $f'(x) = 12 - 6x$
- Estudiamos el signo de la derivada:  
 $12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2$   
 $12 - 6x > 0 \Rightarrow 12 > 6x \Rightarrow 6x < 12 \Rightarrow x < 2$   
 $12 - 6x < 0 \Rightarrow 12 < 6x \Rightarrow 6x > 12 \Rightarrow x > 2$
- La función es creciente en  $(-\infty, 2)$  y decreciente en  $(2, +\infty)$  (y tiene un máximo en  $x = 2$ ).

**Ejercicio nº 47.-**

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$$

**Solución:**

- $f'(x) = \frac{2x - 3}{2}$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$\frac{2x-3}{2} = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2x-3}{2} > 0 \Rightarrow 2x-3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{2x-3}{2} < 0 \Rightarrow 2x-3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

- La función decrece en  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  y crece en  $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$  (y tiene un mínimo en  $x = \frac{3}{2}$ ).

### **Ejercicio nº 48.-**

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$f(x) = (x+2)^2$$

**Solución:**

- $f'(x) = 2(x+2)$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$2(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$2(x+2) > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$2(x+2) < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

- La función decrece en  $(-\infty, -2)$  y crece en  $(-2, +\infty)$  (y tiene un mínimo en  $x = -2$ ).