

8

LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 221

REFLEXIONA Y RESUELVE

Algunos límites elementales

■ Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2,$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3,$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2,$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3,$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2,$

$\lim_{x \rightarrow 2} x^3,$

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x},$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2},$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x},$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2},$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x},$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2},$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1},$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1},$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x + 5}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty;$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty;$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4;$

$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8;$

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0;$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

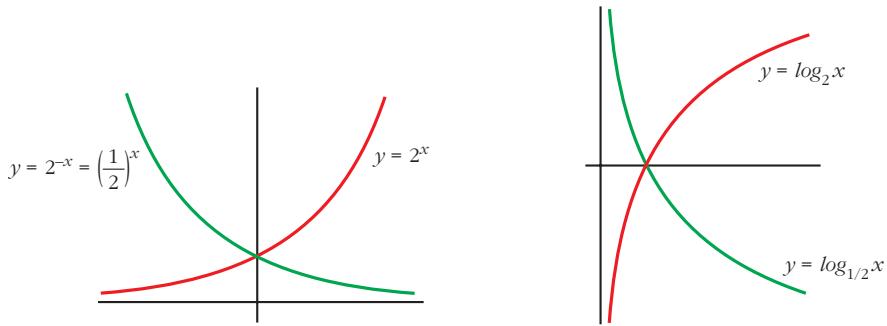
$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1} = +\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x + 5} = -\infty$$

Exponenciales y logarítmicas

Recuerda cómo son las gráficas de algunas funciones exponenciales y logarítmicas:



■ A la vista de estas gráficas, asigna valor a los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x, \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2 x, \lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{1/2} x, \lim_{x \rightarrow 0} \log_{1/2} x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{1/2} x$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2 x$ no existe, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{1/2} x$ no existe, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{1/2} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{1/2} x = -\infty$

Con calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cdot \ln(x-3)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cdot \ln(x-3) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \approx 403,43$

Página 222

1. Asigna límite (finito o infinito) a las siguientes sucesiones e identifica a las que no tienen límite:

a) $a_n = n^3 - 10n^2$ b) $b_n = 5 - 3n^2$ c) $c_n = \frac{n+5}{2-n}$ d) $d_n = \frac{n^2}{n+1}$

e) $e_n = \sin \frac{\pi}{4} n$ f) $f_n = 2^n$ g) $g_n = -2^n$ h) $b_n = (-2)^n$

a) $a_n = n^3 - 10n^2$

(-9, -32, -63, -96, -125, -144, -147, -128, -81, 0, 121, ...) $a_n \rightarrow +\infty$

b) $b_n = 5 - 3n^2$ (2, -7, -22, -43, -70, -103, -142, -187, -283, ...) $b_n \rightarrow -\infty$

c) $c_n = \frac{n+5}{2-n}$ $\left(6, \dots, -8, -\frac{9}{2}, -\frac{10}{3}, -\frac{11}{4}, -\frac{12}{5}, -\frac{13}{6}, -\frac{14}{7}, \dots\right)$ $c_n \rightarrow -1$

d) $d_n = \frac{n^2}{n+1}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \frac{36}{7}, \frac{49}{8}, \frac{64}{9}, \frac{81}{10}, \frac{100}{11}, \dots\right)$ $d_n \rightarrow +\infty$

e) $e_n = \sin \frac{\pi}{4} n$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots\right)$ e_n no tiene límite

f) $f_n = 2^n$ (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...) $f_n \rightarrow +\infty$

g) $g_n = -2^n$ (-2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, ...) $g_n \rightarrow -\infty$

h) $b_n = (-2)^n$ (-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, ...) b_n no tiene límite

Página 225

1. Si $u(x) \rightarrow 2$ y $v(x) \rightarrow -3$ cuando $x \rightarrow +\infty$, calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de:

- a) $u(x) + v(x)$ b) $v(x)/u(x)$
c) $5^{u(x)}$ d) $\sqrt{v(x)}$
e) $u(x) \cdot v(x)$ f) $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{-3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. Si $u(x) \rightarrow -1$ y $v(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$, calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de:

- a) $u(x) - v(x)$ b) $v(x) - u(x)$
c) $v(x)/u(x)$ d) $\log_2 v(x)$
e) $u(x) \cdot v(x)$ f) $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{0}{-1} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } v(x) \rightarrow 0^+ \\ \text{no existe} & \text{si } v(x) \rightarrow 0^- \end{cases}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 226

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\log_{10} x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\log_{10} x) = -\infty$

Página 227**5. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos ($\pm\infty$) cuando $x \rightarrow +\infty$:**

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$

b) $0,5^x$

c) $-1,5^x$

d) $\log_2 x$

e) $1/(x^3 + 1)$

f) \sqrt{x}

g) 4^x

h) 4^{-x}

i) -4^x

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \rightarrow \text{Sí}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,5^x = 0 \rightarrow \text{No}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1,5^x) = -\infty \rightarrow \text{Sí}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty \rightarrow \text{Sí}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 1} = 0 \rightarrow \text{No}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \rightarrow \text{Sí}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x = +\infty \rightarrow \text{Sí}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{-x} = 0 \rightarrow \text{No}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4^x = -\infty \rightarrow \text{Sí}$

6. a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1,5^x \quad 4^x$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x}$$

a) $\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1,5^x \quad 4^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x} = 0$$

Página 228

7. Si, cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow 4$, $b(x) \rightarrow -\infty$, $u(x) \rightarrow 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \rightarrow +\infty$ a las expresiones siguientes:

- | | | |
|------------------|----------------------|------------------|
| a) $f(x) - b(x)$ | b) $f(x)^{f(x)}$ | c) $f(x) + b(x)$ |
| d) $f(x)^x$ | e) $f(x) \cdot b(x)$ | f) $u(x)^{u(x)}$ |
| g) $f(x)/b(x)$ | h) $[-b(x)]^{b(x)}$ | i) $g(x)^{b(x)}$ |
| j) $u(x)/b(x)$ | k) $f(x)/u(x)$ | l) $b(x)/u(x)$ |
| m) $g(x)/u(x)$ | n) $x + f(x)$ | ñ) $f(x)^{b(x)}$ |
| o) $x + b(x)$ | p) $b(x)^{b(x)}$ | q) x^{-x} |

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + b(x)) = (+\infty) + (-\infty) \rightarrow$ Indeterminado

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot b(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \rightarrow$ Indeterminado

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{b(x)} = \frac{(+\infty)}{(-\infty)} \rightarrow$ Indeterminado

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-b(x)]^{b(x)} = [+∞]^{-∞} = 0$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)^{b(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{b(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{u(x)} = \frac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{u(x)} = \frac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{u(x)} = \frac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(x)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{b(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + b(x)) = (+\infty) + (-\infty) \rightarrow$ Indeterminado

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x)^{b(x)} = (-\infty)^{-\infty} \rightarrow$ No existe

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 229

8. Las funciones f , g , b y u son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + b(x)$ b) $f(x)/b(x)$

c) $f(x)^{-b(x)}$ d) $f(x)^{b(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ f) $u(x)^{b(x)}$

g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ h) $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + b(x)) = (+\infty) + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{b(x)} = \frac{(+\infty)}{(-\infty)}$. Indeterminado.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{-b(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{b(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)}$. Indeterminado.

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)^{b(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{4} \right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminado.

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 231

1. Sin operar, di el límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - \sqrt[3]{x^8-2}) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4) = +\infty$

2. Calcula el límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^3+5)(x-2) - (4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2 + 2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4x^2 + 2} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2+x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{x^2+x})(2x + \sqrt{x^2+x})}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$$

Página 232**3. Halla los siguientes límites cuando $x \rightarrow +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$

b) $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$

c) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

e) $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$

f) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5 = 1^5 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^5 = e^5$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

4. Calcula estos límites cuando $x \rightarrow +\infty$:

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$

b) $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$

c) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$

e) $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$

f) $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5 = 1^5 = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^2 = e^2$

Página 233

5. Resuelve, aplicando la regla anterior:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} \right)^{5x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} \right)^{2x-4}$

a) Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} \right)^{5x-3}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{3x-1} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x-3) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} - 1 \right) \cdot (5x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{3x-1} \right) \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

b) Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} \right)^{2x-4}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-4) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^3+x^2} - 1 \right) \cdot (2x-4)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2} \right) \cdot (2x-4)} = e^{-2}$$

Página 235

1. Sin operar, di el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$

f) $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$

h) $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^5 - 1} - 5^x)$ no existe

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - \sqrt{x^4 - 1}) = -\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x+2} - x^2) = -\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2. Calcula el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2}$

b) $\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $2x + \sqrt{x^2 + x}$

e) $\sqrt{x^2 + 2x} + x$

f) $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x+3}$

h) $\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x-1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \frac{-4x^3 - x}{-x - 2} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^3}{2x^2 + 1} + \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x^2 + 2} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + \sqrt{x^2 - x}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2x + \sqrt{x^2 - x})(-2x - \sqrt{x^2 - x})}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-5x+3} = e^{-5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x-1} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1 \right) \cdot (-3x - 1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x - 3}{-x^2 + 2} \cdot (-3x - 1) \right)} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3
 \end{aligned}$$

Página 238

1. Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:

a) $f(x) + g(x)$

b) $f(x) \cdot g(x)$

c) $\frac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$

e) $\sqrt{g(x)}$

f) $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} (4f(x) - 5g(x)) = 12 - 10 = 2$

- 2.** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = l + m$.

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

- 3.** Si $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} q(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 2} s(x) = 0$, di, en los casos en que sea posible, el valor del $\lim_{x \rightarrow 2}$ de las siguientes funciones:

[Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones].

a) $2p(x) + q(x)$ b) $p(x) - 3q(x)$ c) $\frac{r(x)}{p(x)}$ d) $\frac{p(x)}{p(x)}$

e) $\frac{s(x)}{q(x)}$ f) $\frac{p(x)}{q(x)}$ g) $s(x) \cdot p(x)$ h) $s(x)^{s(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ j) $r(x)^{s(x)}$ k) $\frac{3 - r(x)}{s(x)}$ l) $\left[\frac{r(x)}{3} \right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ n) $r(x)^{-q(x)}$ o) $\left(\frac{r(x)}{3} \right)^{-p(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} [p(x) - 3q(x)] = (+\infty) - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{3}{+\infty} = 0$

- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{p(x)}{p(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{q(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$
- f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$. Indeterminado.
- g) $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x) \cdot p(x)] = (0) \cdot (+\infty)$. Indeterminado.
- h) $\lim_{x \rightarrow 2} s(x)^{s(x)} = (0)^{(0)}$. Indeterminado.
- i) $\lim_{x \rightarrow 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$
- j) $\lim_{x \rightarrow 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$
- k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - r(x)}{s(x)} = \frac{3 - 3}{(0)} = \frac{(0)}{(0)}$. Indeterminado.
- l) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{r(x)}{3} \right)^{s(x)} = 1^0 = 1$
- m) $\lim_{x \rightarrow 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$
- n) $\lim_{x \rightarrow 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$
- ñ) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{r(x)}{3} \right)^{p(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminado.
- o) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{r(x)}{3} \right)^{-p(x)} = (1)^{(-\infty)}$. Indeterminado.

Página 239

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x-7} = \frac{9}{-8} = \frac{-9}{8} \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$

5. Calcula los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3(x+3)^3}{x^4(x+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3(x+3)}{x^4}} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{\frac{x(x+1)}{(x+2)^2(x-1)}} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \rightarrow \swarrow \quad \searrow \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

Página 240

$$\text{6. Calcula: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2+1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

$$\text{7. Calcula: } \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim_{x \rightarrow 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x-7} \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x+1}{x-7} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-7)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)}} = e^{12}$$

Página 243

- 1. Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:**

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

Busca los intervalos entre -4 y 3 . Comprueba que $f(1,5) < 0$ y tenlo en cuenta.

Consideramos la función $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en \mathbb{R} y que:

$$\left. \begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (-4, -3).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (0, 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1,5) = -1,375 < 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (1; 1,5).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1,5) = -1,375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (1,5; 2).$$

- 2. Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.**

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ es una función continua. Además:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0,26 < 0 \end{array} \right\} \text{signo de } F(0) \neq \text{signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

- 3. Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:**

- a) $x^2 - 1$ en $[-1, 1]$
- b) x^2 en $[-3, 4]$
- c) $1/(x - 1)$ en $[2, 5]$
- d) $1/(x - 1)$ en $[0, 2]$
- e) $1/(1 + x^2)$ en $[-5, 10]$

a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $[-1, 1]$. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en $[-3, 4]$. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es continua en $[2, 5]$. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ no es continua en $[0, 2]$, pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $[-5, 10]$. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

- 1** Sabiendo que $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ y $\lim c_n = 3$, di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminación.

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $a_n + b_n$	b) $b_n + c_n$	c) $\frac{a_n}{c_n}$	d) $\frac{a_n}{b_n}$
e) $(c_n)^{b_n}$	f) $(3 - c_n) \cdot a_n$	g) $\frac{b_n}{3 - c_n}$	h) $\left(\frac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty + (-\infty) = (+\infty) - (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación.

b) $\lim(b_n + c_n) = \lim b_n + \lim c_n = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim \frac{a_n}{c_n} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{(+\infty)}{(-\infty)} \rightarrow$ Indeterminación.

e) $\lim [c_n]^{b_n} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim [3 - c_n] \cdot a_n = (0) \cdot (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación.

g) $\lim \frac{b_n}{3 - c_n} = \frac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$ (puede ser $+\infty$ o $-\infty$).

h) $\lim \left[\frac{3}{c_n} \right]^{b_n} = (1)^{(-\infty)} \rightarrow$ Indeterminación.

- 2** Calcula los límites cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x + 5}{2 - x}$

b) $g(x) = \frac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $b(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$

d) $i(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 2x - 3}{7 - 5x^3} = \frac{1}{5}$

3 Calcula los límites de las sucesiones siguientes:

a) $\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1}$

b) $\lim \sqrt{\frac{5n^2 - 7}{n + 1}}$

c) $\lim \frac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3}$

d) $\lim \frac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}}$

a) $\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1} = \lim \frac{\sqrt{3} n}{2n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim \sqrt{\frac{5n^2 - 7}{n + 1}} = +\infty$

c) $\lim \frac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3} = 0$

d) $\lim \frac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}} = 0$

4 Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}) = +\infty$

5 Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (0,5^{-x} + 1) = +\infty$

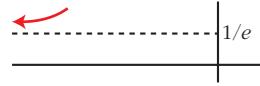


b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x+1} = 0$

Sabemos que $2^{x+1} > 0$ para cualquier x .

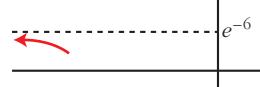


c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$



Comprobamos que $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x > \frac{1}{e}$ dando a x algún valor. Por ejemplo, $x = -10$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1+3x} =$



$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1+3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2-6x}{x}\right)} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Comprobamos que $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x} < e^{-6}$ dando a x algún valor. Por ejemplo, $x = -10$.

6 Halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4})$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4})$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

7 Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

a) $f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$

b) $g(x) = \frac{x + \log x}{\log x}$

c) $b(x) = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$

d) $i(x) = \frac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{5}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \log x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\log x} + 1 \right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

8 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1,2^x - \frac{3x^2}{x + 1} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x-1}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 13x}{2x+2} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x})}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1,2^x - \frac{3x^2}{x + 1} \right) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

9 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{3x - 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2} \right)^{x^2 - 5}$

a) Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - 1 \right) \cdot x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1}} = e^2$$

b) Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x - 1}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x - 2} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} - 1 \right) \cdot (2x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 3}{x - 2}} = e^6$$

c) Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x + 2}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 3} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} - 1 \right) \cdot (x + 2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4(x + 2)}{x + 3}} = e^{-4}$$

d) Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{3x - 2} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{3} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2} - 1 \right) \cdot \frac{x + 1}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{3x - 2} \cdot \frac{x + 1}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 2}{9x - 6}} = e^{-2/9}$$

e) Sea $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2) = +\infty$, se trata de un límite del tipo

$$\frac{1}{(1)^{(+\infty)}}.$$

Aplicando la fórmula:

$$l = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

f) Sea $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-5) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} - 1\right) \cdot (x^2-5)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5(x^2-5)}{x+2}} = +\infty$$

10 Halla $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x} = +\infty$

Página 250

Límites en un punto

11 Sabiendo que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} q(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x) \cdot q(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x) \cdot q(x)] = (0) \cdot (-\infty) \rightarrow$ Indeterminado.

d) $\lim_{x \rightarrow 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

12 Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3}{x^3} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right]$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{(0)}$.

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty. \text{ No tiene límite.}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{2}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty.$$

Así, $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = +\infty.$

13 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{1-x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Dividimos numerador y denominador por $x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-6)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (6-x) = 5$$

(*) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 6 \\ \hline 1 & & 1 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{1-x^2} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{(x-1)^3}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{-(x-1)(1+x)} = \frac{(x-1)^2}{-(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{-(1+x)} = \frac{0}{-2} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Dividimos numerador y denominador por $x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x-2} = 0$$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2x) = 2x$$

14 Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x-2} \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right]$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{(x-2)(x-3)} - \frac{4}{(x-2)} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - 4(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - 4x + 12}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4x + 15}{(x-2)(x-3)} = \frac{7}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4x + 15}{(x-2)(x-3)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-4x + 15}{(x-2)(x-3)} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 - \sqrt{3-x})(1 + \sqrt{3-x})}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (3-x)}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 3 + x}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

15 Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) Sea $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}.$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{2x + 1} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} l &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{2x + 1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x(2x+1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{2x+1}} = e^{-2} \end{aligned}$$

b) Sea $l = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}}.$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} l &= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{7 - x} \cdot \frac{1}{x-2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+4}{7-x}} = e^{8/5} \end{aligned}$$

Continuidad**16** Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (6 - x) = 4 \\ f(2) &= 6 - 2 = 4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } x = 2, \\ \text{puesto que } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2). \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 5 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \text{ no es continua en } x = 2, \\ \text{puesto que no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x). \end{array} \right\}$$

s17 Estudia la continuidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • En $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua; puesto que e^x y $\ln x$ son continuas para $x < 1$ y $x \geq 1$, respectivamente.

• En $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) = 0$

No es continua en $x = 1$, pues no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow$ La función es continua.
- En $x = 0$ es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

Además, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

- En $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } x = 1, \text{ pues} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1). \end{array}$$

18 Halla los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$ y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3)-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+6-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x-6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos los valores que anulan el denominador:

$$(x-3)(x+3) = 0 \quad \begin{array}{c} x = 3 \\ x = -3 \end{array}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$, pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2}{x+3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2}{x+3} = +\infty$

Hay una asíntota vertical en $x = -3$; la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Luego en $x = 3$, la discontinuidad es evitable, porque la función tiene límite en ese punto.

PARA RESOLVER

- 19** a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 2$, $x \rightarrow 3$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 5x + 6}$$

- b) Representa gráficamente los resultados.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x-3}{(x-3)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

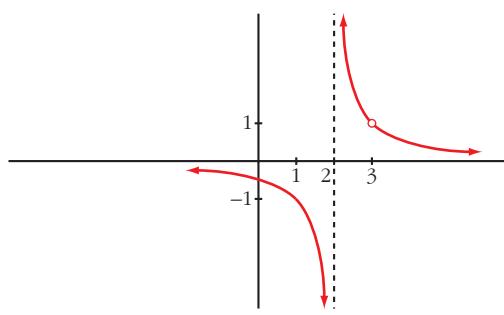
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

b)



s20 Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k - x) = k - 2$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

Para que sea continua, ha de ser:
 $k - 2 = 3 \rightarrow k = 5$

b) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$$

$$f(0) = 0 + k = k$$

Para que sea continua, ha de ser:
 $k = -1$

c) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{kx} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2k = 2k$$

$$f(0) = e^{k \cdot 0} = 1$$

Para que sea continua, ha de ser:
 $1 = 2k \rightarrow k = 1/2$

Página 251

s21 Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua, porque lo es $\frac{x^4 - 1}{x - 1}$.

Para que sea continua en $x = 1$, debe verificarse que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Calculamos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4\end{aligned}$$

$$f(1) = k$$

(*) Indeterminación del tipo $\frac{(0)}{(0)}$. Simplificamos la fracción.

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $k = 4$. Para este valor, f es continua en \mathbb{R} .

b) • Si $x \geq 0$ y $x \neq 1$, la función es continua, porque lo es $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Para que sea continua en $x = 1$, debe verificarse que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Calculamos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \quad (\text{Indeterminación}).$$

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $(\sqrt{x} + 1)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$f(1) = k$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $k = \frac{1}{2}$. Para este valor, f es continua en $[0, +\infty)$.

22 Estudia la continuidad de esta función: $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1 \rightarrow$ la función es continua.

- Si $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) &= 1\end{aligned} \right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.

Además:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \end{array} \right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

- 23** Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

- a) Halla a de modo que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
- b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

► El precio de una unidad es $C(x)/x$.

a) $\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (5x) = 50$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$$

$$C(10) = 50$$

Para que sea continua, ha de ser:

$$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2500 \rightarrow 100a = 2000 \rightarrow a = 20$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ €}$

- s24** En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t , siguiendo la ley:

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

- a) Decide la cuestión.

- b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

a) Para que la función sea continua en $t = 8$, debe cumplirse que $\lim_{t \rightarrow 8} T(t) = T(8)$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{t \rightarrow 8^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 8^+} T(t) &= \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} = \\&= \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{(\sqrt{3t - 15} - 3)(\sqrt{3t - 15} + 3)}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} = \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} = \\&= \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} = \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} = \\&= \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Para que $T(t)$ pueda ser continua, tendría que cumplirse que:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 + a = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-31}{4}$$

Pero, si $a = \frac{-31}{4}$, quedaría $T(t) = \sqrt{t + \frac{-31}{4}}$ si $t < 8$.

Esto daría lugar a que $T(t)$ no existiera para $t \leq \frac{31}{4} = 7,75$ horas.

Por tanto, no hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1,73$ micras.

25 Dada $f(x) = \frac{|x|}{x + 1}$, justifica que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

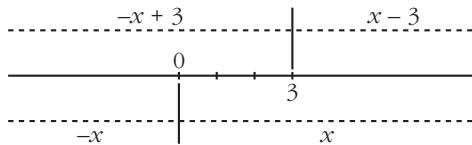
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

26 Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:

$$\text{a) } f(x) = |x - 3| - |x| \quad \text{b) } f(x) = |2x - 1| + x \quad \text{c) } f(x) = \frac{x + 1}{|x|}$$

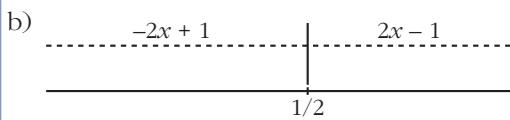
a) Definimos f por intervalos:



- Si $x < 0$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$
- Si $0 \leq x \leq 3$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - x = -2x + 3$
- Si $x > 3$: $|x - 3| - |x| = (x - 3) - x = -3$

Luego:
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$



- Si $x \leq \frac{1}{2}$: $|2x - 1| + x = -(2x - 1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$
- Si $x > \frac{1}{2}$: $|2x - 1| + x = (2x - 1) + x = 3x - 1$

Luego:
$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$$

c) • Si $x < 0$: $\frac{x + 1}{|x|} = \frac{x + 1}{-x}$

• Si $x > 0$: $\frac{x + 1}{|x|} = \frac{x + 1}{x}$

f no está definida en $x = 0$. Luego: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x} = -1$$

27 Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función:

$$y = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

s28 Se define la función f del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ f(1) = 2 + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguales, es decir:} \\ 2 + a = -1 \rightarrow a = -3 \end{array}$$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

CUESTIONES TEÓRICAS

29 Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$?

¿Puede ser continua la función en $x = 3$?

Sí, puede ser que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

30 De una función continua, f , sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

s31 Sea la función $f(x) = x^2 + 1$.

¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo $[1, 5]$? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función toma, en el intervalo $[0, 2]$, todos los valores del intervalo $[1, 5]$.

s32 Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.

☞ Mira el ejercicio resuelto 11.

- Interpretación geométrica: Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces, con seguridad, corta al eje X en ese intervalo.
- Para las dos funciones dadas, $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$, consideramos la función diferencia: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, también lo es $f(x) - g(x)$.

Además:
$$\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 & \rightarrow f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9,42 & \rightarrow f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$$

Por tanto, existe un número $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$ (aplicando el teorema de Bolzano), es decir, $f(c) = g(c)$.

Página 252**s33** Considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

34 De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$. ¿Cuánto vale $g(0)$?

Si g es continua en $x = 0$, debe verificar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$. Hallamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

s35 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en $[0, 1]$ y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Según el teorema de Bolzano, si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $\operatorname{signo} de f(a) \neq \operatorname{signo} de f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Veamos si se cumplen las hipótesis. Estudiamos la continuidad en $x = \frac{1}{2}$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{x-4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x), \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1/2} f(x). \end{array}$$

$f(x)$ no es continua en $x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, f no es continua en el intervalo $[0, 1]$; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

- s36** Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ cumple que $f(c) = 7$? Razona la respuesta y pon ejemplos.

No lo podemos asegurar. Por ejemplo:

$f(x) = x + 3$ cumple que $f(0) = 3$ y $f(2) = 5$. Sin embargo, no existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 7$, ya que: $f(c) = c + 3 = 7 \rightarrow c = 4 \rightarrow c \notin [0, 2]$.

- s37** Halla razonadamente dos funciones que no sean continuas en un punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

pero la función suma, $f(x) + g(x) = 3x$, sí es continua en $x = 2$.

- s38** ¿Tiene alguna raíz real la siguiente ecuación?:

$$\operatorname{sen} x + 2x + 1 = 0$$

Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Consideramos la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) \approx 1,84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array} \right\} \text{signo de } f(1) \neq \text{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

- s39** Demuestra que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.

Consideramos la función $f(x) = x^5 + x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array} \right\} \text{signo de } f(-1) \neq \text{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

s40 Una ecuación polinómica de grado 3 es seguro que tiene alguna raíz real. Demuestra que es así, y di si ocurre lo mismo con las de grado 4.

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio de grado 3, tenemos que:

— Si $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

— Si $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Como f pasa de $+\infty$ a $-\infty$ o viceversa, podemos encontrar un número k tal que $\text{signo de } f(-k) \neq \text{signo de } f(k)$.

Además, $f(x)$ es continua. Por el teorema de Bolzano, sabemos que $f(x)$ tiene al menos una raíz c en el intervalo $(-k, k)$. Dicha raíz es la solución de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 4, no ocurre lo mismo.

Por ejemplo, $x^4 + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real; puesto que $x^4 + 1 > 0$ para cualquier valor de x .

s41 Si el término independiente de un polinomio en x es igual a -5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7 , razona que hay algún punto en el intervalo $(0, 3)$ en el que el polinomio toma el valor -2 .

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces es una función continua. El término independiente es igual a -5 ; es decir, $f(0) = -5$; y, además, $f(3) = 7$. Por tanto, aplicando el teorema de los valores intermedios, como $-5 < -2 < 7$, podemos asegurar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = -2$.

s42 La función $y = \operatorname{tg} x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

La función $y = \operatorname{tg} x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$, que está en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano para dicho intervalo.

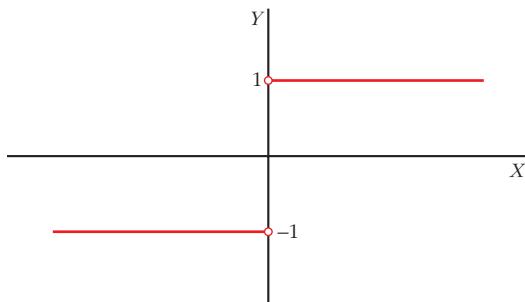
s43 Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

Definimos f por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo \mathbb{R} (pues en $x = 0$ no lo es). Tiene una discontinuidad de salto finito.

Gráfica:



s44 Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿podemos asegurar que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.

Si $f(x) > 0$ cuando $x < a$, entonces, si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ha de ser $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$.

Por tanto, podemos asegurar que el límite no es negativo (podría ser positivo o cero).

s45 a) Comprueba que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] = 0$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] = \ln 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \ln e = 1 \end{aligned}$$

s46 De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que son continuas en el intervalo $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ y que $f(b) < g(b)$.

¿Puede demostrarse que existe algún punto c de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones?

Consideramos la función $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces $f(x) - g(x)$ es continua en $[a, b]$.
- Si $f(a) > g(a)$, entonces $f(a) - g(a) > 0$.

- Si $f(b) < g(b)$, entonces $f(b) - g(b) < 0$.

Es decir, $\text{signo } [f(a) - g(a)] \neq \text{signo } [f(b) - g(b)]$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$. (Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $x = c$).

s47 Si $f(x)$ es continua en $[1, 9]$, $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$?

- Si $f(x)$ es continua en $[1, 9]$, entonces $g(x) = f(x) + 3$ también será continua en $[1, 9]$ (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si $f(1) = -5$, entonces $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, entonces $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Es decir, $\text{signo de } g(1) \neq \text{signo de } g(9)$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$.

48 Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$

a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

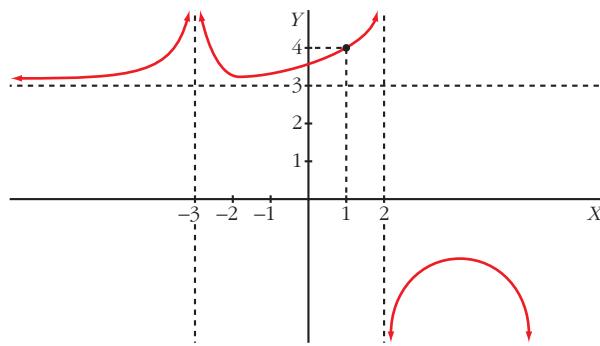
b) Dado k , podemos encontrar h tal que, si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k , podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k , podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.

e) Dado k , podemos encontrar δ tal que, si $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces $f(x) > k$.

f) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1 + \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$.



PARA PROFUNDIZAR

- 49** Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando x tiende a $+\infty$:

a) $f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x$

b) $g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$

c) $b(x) = \frac{E[x]}{x}$

d) $j(x) = \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x}$

a) Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, entonces: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - \operatorname{sen} x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

b) Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, entonces: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) Como $x - 1 < E[x] < x$,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E[x]}{x} < \frac{x}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E[x]}{x} < \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E[x]}{x} = 1$$

d) Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\pm 1}{x} \right) = 3 + 0 = 3$$

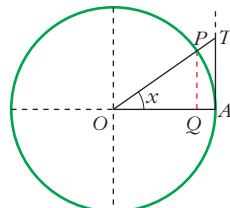
- 50** En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo \widehat{AOP} de x radianes. Observa que:

$$\overline{PQ} = \operatorname{sen} x, \overline{TA} = \operatorname{tg} x \text{ y } \operatorname{arco} \widehat{PA} = x$$

$$\text{Como } \overline{PQ} < \overline{PA} < \overline{TA} \rightarrow \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

A partir de esa desigualdad, prueba que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$



Tenemos que $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$. Dividiendo entre $\operatorname{sen} x$, queda:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Tomando límites cuando $x \rightarrow 0$, queda:

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq 1; \text{ es decir: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

51 Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \quad \left(\text{Si hacemos } 2x = z, \text{ tenemos } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x / \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

52 Supongamos que f es continua en $[0, 1]$ y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$. Prueba que existe un número c de $(0, 1)$ tal que $f(c) = c$.

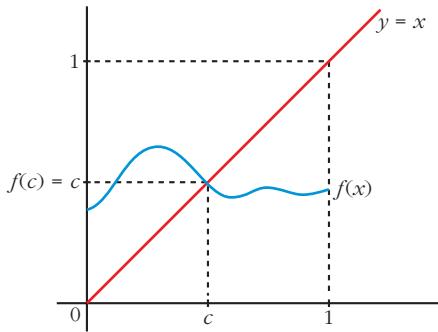
Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que:

- $g(x)$ es continua en $[0, 1]$, pues es la diferencia de dos funciones continuas en $[0, 1]$.
- $g(0) = f(0) - 0 > 0$, pues $f(x) > 0$ para todo x de $[0, 1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pues $f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$.

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



Página 253

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{1/(1-x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1} = -\infty$, porque el minuendo es de grado 2, y el sustraendo, de grado 3.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)} = \frac{(0)}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{1/(1-x)} \rightarrow$ Como es del tipo $(1)^{(+\infty)}$, podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{1/(1-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left((x-1) \cdot \frac{1}{1-x} \right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}) = (\infty) - (\infty)$

Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por $2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}$:

$$\frac{(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2}{2 + \sqrt{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$:

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

a) Si $x \neq 0$, f es continua, porque e^x y $1-x$ son funciones continuas en \mathbb{R} .

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0) \rightarrow f \text{ es continua en } \mathbb{R}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

3. a) Estudia la continuidad de $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2+3x}$ y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.

b) Halla sus límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$.

c) Representa la información obtenida en a) y b).

a) La función es discontinua en los puntos en los que no está definida. En este caso, en los puntos que anulan su denominador.

$$x^2 + 3x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Estudiamos el tipo de discontinuidad:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = \frac{(9)}{(0)} = \pm\infty \quad \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$

- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = \frac{(0)}{(0)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(3+x)(3-x)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3-x}{x} = -2$

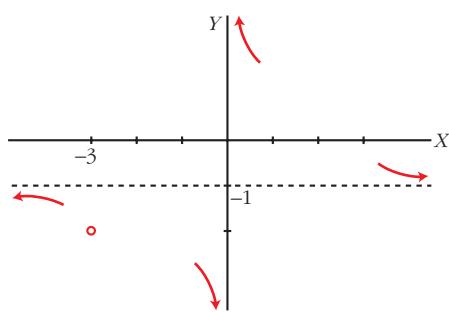
En $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

En $x = -3$, tiene una discontinuidad evitable.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = -1$$

c)



4. Halla a para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \rightarrow 4 = \sqrt{a} \rightarrow a = 16$$

5. Halla a y b para que esta función sea continua y represéntala:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, debe cumplirse:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x - a = -a \\ f(0) = -a \end{array} \right\} b = -a \quad (1)$$

Para que sea f continua en $x = 1$, debe ser:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a}{x} + b = a + b \\ f(1) = a + b \end{array} \right\} 1 - a = a + b \quad (2)$$

$$\text{De (1) y (2) obtenemos: } 1 - a = a - a \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Si $a = 1$ y $b = -1$, la función es continua en $x = 0$ y en $x = 1$.

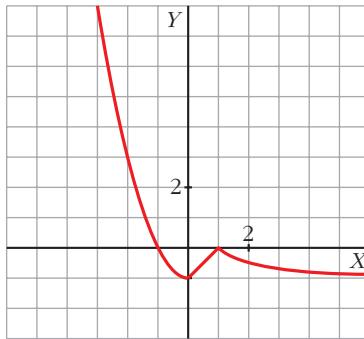
Para valores de $x < 0$ y $0 \leq x < 1$, f está definida por medio de funciones polinómicas, que son continuas.

Para valores de $x \geq 1$, la función $\frac{a}{x} + b$ es también continua.

Por tanto, si $a = 1$ y $b = -1$, f es continua en todos sus puntos.

Representación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



- 6. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}x$, demuestra que existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.**

Construimos la función $g(x) = f(x + 1) - f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi(x + 1)}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4}$.

Demostrar que $f(c + 1) = f(c)$ para algún $c \in (0, 4)$, es lo mismo que demostrar que existe $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$.

$$g(0) = \operatorname{sen} \frac{\pi(0 + 1)}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot 0}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$g(4) = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La función g es continua en $[0, 4]$ y $\operatorname{signo} g(0) \neq \operatorname{signo} g(4)$.

Según el teorema de Bolzano, existirá un $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c + 1) = f(c)$.

- 7. Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$. Demuestra que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.**

$f(x) = x + e^{-x}$ es una función continua en \mathbb{R} . Calculamos algunos valores de f :

$$f(0) = 0 + e^0 = 1 \quad f(5) = 5 + e^{-5} = 5,007$$

Por el teorema de los valores intermedios, $f(x)$ toma todos los valores del intervalo $[1; 5,007]$.

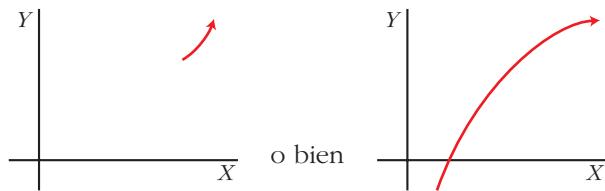
Por tanto, existirá un $0 < c < 5$ tal que $f(c) = 4$. Es decir, $c + e^{-c} = 4$

8. Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:

a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K , por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

