

11 Funciones

INTRODUCCIÓN

El concepto de función es uno de los más importantes que se tratan en este curso y, aunque no reviste una especial dificultad, plantea a veces problemas a los alumnos.

Por ello, la unidad comienza explicando cómo determinar si una relación entre magnitudes es función o no, así como las distintas formas de expresar una función: mediante texto, tabla, fórmula y gráfica, dedicando atención al análisis de estas últimas. Es importante trabajar las distintas expresiones de una función, señalando que todas son equivalentes y expresan lo mismo. Una vez determinado que la relación entre dos magnitudes es una función, el siguiente paso es diferenciar entre variable independiente y dependiente.

El análisis de las características de las funciones centrará el resto de la unidad. Se estudiarán el dominio y el recorrido de la función, su continuidad o discontinuidad, intervalos donde la función crece o decrece y la determinación de los valores donde alcanza un máximo o un mínimo.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *magnitud* es una característica que puede ser medida y expresada con un número.
- Una *función* es una correspondencia entre variables que asocia a cada valor de una de ellas un único valor de la otra.
- Una *variable independiente* es la que puede tomar cualquier valor. La *variable dependiente* depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Gráfica de una función*: representación del conjunto de puntos del plano que la definen.
- *Función periódica*: su gráfica se repite cada cierto intervalo; $f(x) = f(x + T)$, siendo T el período.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir relaciones funcionales entre magnitudes.	<ul style="list-style-type: none"> • Variables. • Relación funcional. 	<ul style="list-style-type: none"> • Determinación de la relación entre dos variables, señalando si es o no funcional.
2. Conocer las diferentes expresiones de una función.	<ul style="list-style-type: none"> • Expresión de una función mediante texto, tabla, gráfica o expresión algebraica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Expresión de una función. • Obtención de unas expresiones a partir de otras.
3. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	<ul style="list-style-type: none"> • Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención del recorrido y el dominio de una función.
4. Distinguir entre funciones discontinuas y continuas.	<ul style="list-style-type: none"> • Función continua. • Función discontinua. 	<ul style="list-style-type: none"> • Diferenciación de funciones continuas y discontinuas. • Resolución de problemas: ecuación, variables y representación gráfica.
5. Estudiar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una gráfica.	<ul style="list-style-type: none"> • Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
6. Reconocer las funciones periódicas.	<ul style="list-style-type: none"> • Función periódica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de funciones periódicas y su período.

11

OBJETIVO 1

DISTINGUIR RELACIONES FUNCIONALES ENTRE MAGNITUDES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- **Magnitud** es cualquier característica que puede ser medida y su valor expresado mediante un número.
- Una **relación entre dos magnitudes** es una forma de asociar una serie de valores de una de ellas con una serie de valores de la otra. Por ejemplo:
 - El consumo de gasolina de un coche asociado a la distancia recorrida.
 - El precio del menú de un restaurante depende de los platos elegidos.
 - El precio de las entradas de cine está relacionado con el número de amigos que vamos.
- En una relación entre magnitudes, los valores de estas cambian, y por eso las magnitudes se llaman **variables**.

1 ¿Qué características son magnitudes? Marca con una cruz.

- El número de páginas de un libro.
- El color de la tapa de un cuaderno.
- El precio de un disco compacto.
- La altura de un edificio.

2 De las parejas de magnitudes, ¿cuáles están relacionadas? Marca con una cruz.

- La altura de los alumnos de clase y su nota en Matemáticas.
- El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento.
- El número de entradas de cine y su importe.
- La velocidad de un coche y el tiempo utilizado en un trayecto.

- Si en una relación entre dos magnitudes, cada valor de una de ellas está asociado a un único valor de la otra, se dice que esa correspondencia o relación es una **función**.
 - Las magnitudes *número de kilos de naranjas* y *coste* representan una función.
A un cierto número de kilos solo le corresponde un precio.
 - El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento no representan una función.
A un cierto coeficiente le pueden corresponder varios lugares de nacimiento.
- La **variable independiente (x)** puede tomar cualquier valor, y el valor de la **variable dependiente (y)** depende del que tome la variable independiente.

3 De los siguientes pares de magnitudes, señala cuáles representan una función. Identifica su variable dependiente e independiente.

- El volumen de un cubo y su arista.
- La edad de una persona y su color de ojos.
- El importe del recibo de la luz y la cantidad de electricidad que se gasta.
- La edad de una persona y su talla de camisa.
- El número de diagonales y el número de lados de un polígono.
- La edad de un padre y la edad de su hijo.

OBJETIVO 2

CONOCER LAS DIFERENTES EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN**11**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante una tabla:** los valores de las variables independiente y dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante un gráfico:** nos da una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente.

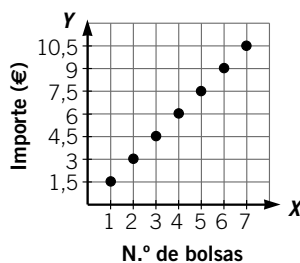
EJEMPLO

Un grupo de amigos va al cine y compran bolsas de palomitas. Una bolsa vale 1,50 €, dos bolsas valen 3 € y cinco bolsas valdrán 7,50 €.

Vamos a expresar este ejemplo de las cuatro maneras que acabamos de ver:

- **Mediante un texto:** el importe que hay que pagar en euros es el producto de 1,50 por el número de bolsas de palomitas compradas.
- **Mediante una tabla:** el número de bolsas es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.
- **Mediante un gráfico:** hemos elegido un gráfico de puntos en un sistema de ejes de coordenadas.

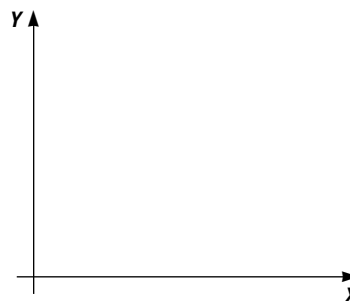
N.º DE BOLSAS	1	2	3	...
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	...



- **Mediante una fórmula:** si llamamos y al importe en euros y x al número de bolsas de palomitas, la fórmula será: $y = 1,5 \cdot x$.

- 1** Una compañía telefónica cobra en su recibo una cuota fija de 0,13 € en cada llamada y 0,15 € por cada minuto. Obtén la tabla, la gráfica y la fórmula que expresa la relación entre el importe del recibo de teléfono y el número de minutos.

N.º DE MINUTOS (x)				
IMPORTE DEL RECIBO (y)				

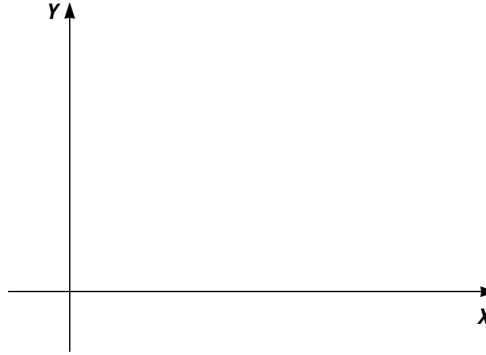


11

La **gráfica de una función** es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

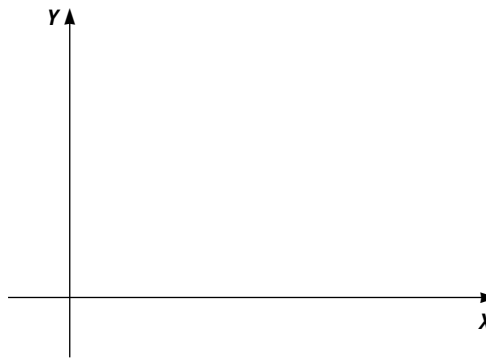
- 2** La siguiente tabla expresa la relación entre el lado de un cuadrado y su área. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.

LADO	ÁREA
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100



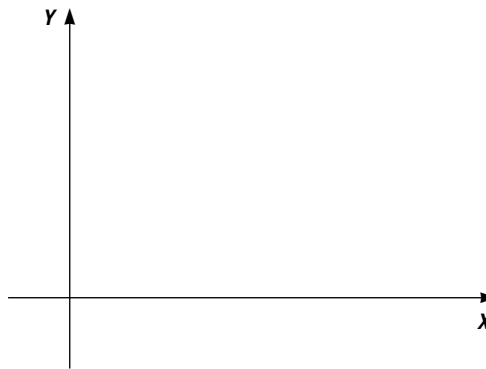
- 3** Dada la función mediante la fórmula: $y = x^2 + 1$, obtén la tabla y la gráfica.

x	$y = f(x)$
-3	$(-3)^2 + 1 = 10$
-2	
1	
0	
1	
2	
3	



- 4** Dada la función mediante la fórmula: $y = x^2 - 2$, obtén la tabla y la gráfica.

x	$y = f(x)$



- 5** Expresa, mediante una fórmula, la relación que existe entre las siguientes magnitudes.

- El radio de una circunferencia y su longitud.
- El lado de un cuadrado y su área.
- El radio de una esfera y su volumen.

OBJETIVO 3

CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN**11**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Una relación entre dos magnitudes es una **función** si a cada valor de la variable independiente se le asocia un único valor de la variable dependiente: $f(x) = y$.
- El valor de la **variable independiente** se suele representar por x , y también se llama **original**.
- El valor de la **variable dependiente** se suele representar por y , y también se llama **imagen**.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x .
- El **recorrido** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable y .

EJEMPLO

Dada la función $f(x) = 2x + 3$, calcula las imágenes para $x = 0$ y $x = -1$.

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

Halla el dominio y el recorrido de la función: $f(x) = 3x - 7$.

El dominio y el recorrido de la función son el conjunto de los números reales, ya que la variable x puede tomar como valor cualquier número real, y para cada uno de esos números reales, la variable y tiene como valor también un número real.

1 Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más 5 unidades:

- Halla su fórmula o expresión algebraica.
- Calcula $f(2)$ y $f(0)$.
- ¿Es posible encontrar la imagen de $\frac{2}{3}$?
- Determina el dominio.

2 Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la suma de ese número más 5:

- ¿Es una función? Si lo es, determina cuál es su fórmula.
- ¿Se puede calcular $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ y $f(-5)$?
- Determina su dominio y recorrido.

11

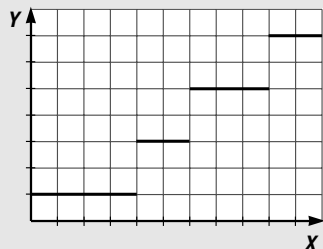
OBJETIVO 4

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES DISCONTINUAS Y CONTINUAS

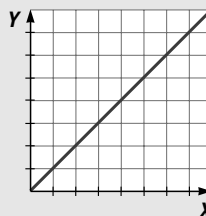
NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

FUNCIÓN DISCONTINUA

Una función es discontinua si no se puede dibujar de un solo trazo, y los puntos donde necesitamos levantar el lápiz del papel se denominan puntos de discontinuidad.

**FUNCIÓN CONTINUA**

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, no presenta puntos de discontinuidad.



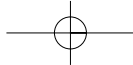
- 1** Estudia la relación que existe entre la edad de Juan y la paga semanal que le dan sus padres, teniendo en cuenta estos datos. Desde que nació hasta los 10 años no recibió paga semanal, desde los 10 años hasta los 12 recibió 5 € semanales, desde los 12 años hasta los 15 recibió 8 €, desde los 15 años hasta los 20 recibió 10 €, y a partir de los 20 años dejó de recibir paga semanal. Obtén la tabla que relaciona ambas magnitudes y la gráfica. ¿Cómo es la función que has obtenido, continua o discontinua?

- 2** Un vendedor de muebles tiene un sueldo base de 650 € y por cada mueble que vende cobra una comisión de 100 €.

- a) Representa la gráfica que expresa el sueldo en función del número de muebles vendidos.
b) ¿Es la función continua o discontinua?

- 3** Dada la función que asocia a cada número real su cuádruple más 2 unidades:

- a) Escribe su expresión algebraica.
b) Representa gráficamente la función.
c) ¿Es continua o discontinua?



OBJETIVO 5

ESTUDIAR EL CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS**11**

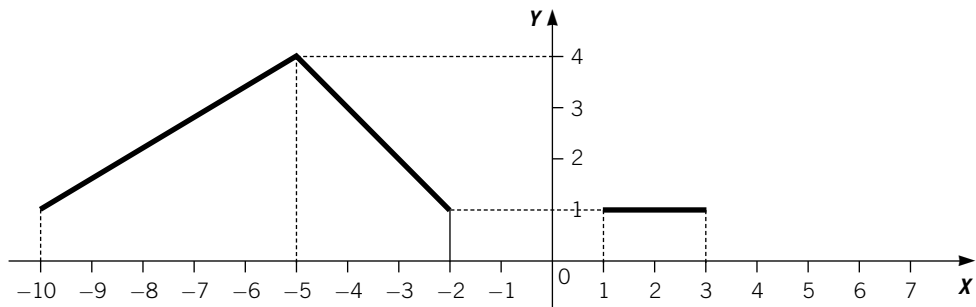
NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Dada una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2 , tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_2) - f(x_1) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2 .
- Si $f(x_2) - f(x_1) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2 .

EJEMPLO

Dada la siguiente función, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Siempre se empieza estudiando el eje X, de izquierda a derecha.

- En el intervalo $[-10, -5]$, la función crece y su tasa de crecimiento es:

$$\left. \begin{array}{l} f(-10) = 1 \\ f(-5) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow f(-10) - f(-5) = 4 - 1 = 3$$

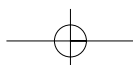
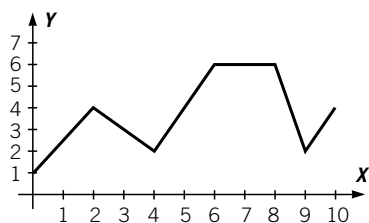
- En el intervalo $[-5, -2]$, la función decrece y su tasa de decrecimiento es:

$$\left. \begin{array}{l} f(-5) = 4 \\ f(-2) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow f(-5) - f(-2) = 4 - 1 = 3$$

- Hay una discontinuidad desde $x = -2$ a $x = 1$.
- En el intervalo $[1, 3]$, la función no crece ni decrece, se mantiene constante.

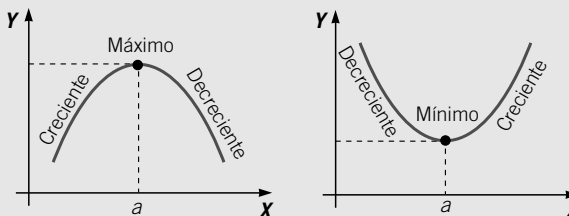
1 Representa una función con las siguientes características.

- Es creciente en los intervalos $[2, 5]$ y $[7, 9]$.
- Es decreciente en $[5, 7]$.
- Es constante en $[0, 2]$.

2 Dada la función representada por la gráfica siguiente, estudia su continuidad y crecimiento.

11

- Una función tiene un **máximo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, la función es creciente, y a la derecha es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, es decreciente, y a la derecha, creciente.



- 3 Dada la función $y = x^2 - 4$, haz una tabla de valores, represéntala y estudia si es continua, dónde es creciente y decreciente y si tiene máximos y mínimos.

- 4 La siguiente tabla muestra la cantidad de medicamento en sangre que tiene una persona después de tomar un jarabe.

TIEMPO (horas)	1	2	3	4	5	6	7
CANTIDAD (mg/dl)	90	75	60	45	30	15	0

- Haz una gráfica a partir de la tabla.
- La función representada, ¿es continua?
- ¿Es creciente o decreciente?
- ¿Tiene máximo o mínimo?

OBJETIVO 6

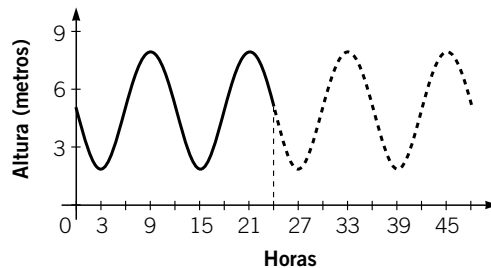
RECONOCER LAS FUNCIONES PERIÓDICAS**11**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

En una **función periódica**, su gráfica se repite cada cierto intervalo, que se denomina período, es decir, $f(x) = f(x + T)$, siendo T el valor del período.

EJEMPLO

Analiza cómo varía la profundidad del agua en una playa a lo largo del tiempo.



Esta función es periódica porque si tomamos la gráfica en el intervalo $[3, 15]$, vemos que se repite exactamente igual en el intervalo $[15, 27]$ y sigue repitiéndose en $[27, 39]$, y así de forma sucesiva.

Se llama período a la longitud del intervalo que se repite:

$$\left. \begin{array}{l} [3, 15] \rightarrow 15 - 3 = 12 \\ [15, 27] \rightarrow 27 - 15 = 12 \\ [27, 39] \rightarrow 39 - 27 = 12 \end{array} \right\} \rightarrow \text{En este caso, el período es } 12.$$

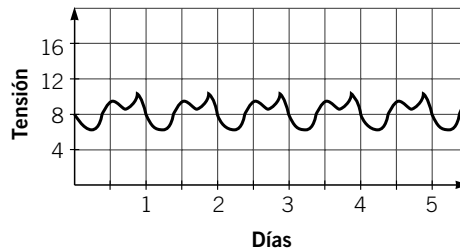
- 1** Un tren sale de Alborada a las 12 horas y se dirige a Borán a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Para durante 20 minutos y, después, sale de Borán con dirección a Alborada, llegando en 50 minutos. Vuelve a parar 10 minutos y a la hora en punto vuelve a salir hacia Borán.

- a) Representa gráficamente esta situación (coloca en el eje de abscisas el tiempo, y en el eje de ordenadas, la distancia del tren respecto a Alborada).
b) ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su período?

- 2** La cantidad de lluvia que cae en un lugar depende de su situación y de la época del año. Inventa los datos y dibuja una gráfica. ¿Es una función periódica? ¿Tiene máximos y mínimos?

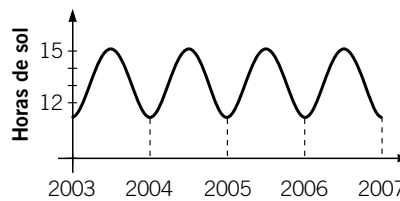
11

- 3** La gráfica muestra cómo varía la tensión arterial mínima de una persona a lo largo de varios días.



- ¿Es una función periódica? Si lo es, indica el período.
- ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?
- ¿Cuándo se da un máximo? ¿Y un mínimo?

- 4** Observa el gráfico que muestra las horas de luz solar en un lugar en el mes de enero durante 5 años consecutivos.



- ¿Es una función periódica?
- ¿Cuál es el período?
- ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?