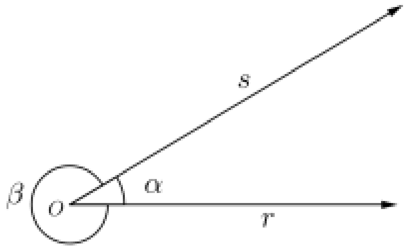
TRIGONOMETRÍA

1. ÁNGULOS

1.1. Ángulo en el plano

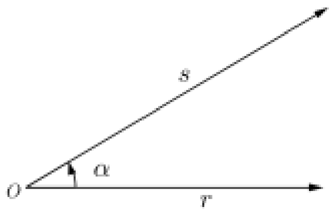
Dos semirrectas en el plano, r y s, con un origen común O, dividen dicho plano en dos regiones. Cada una de de estas regiones determina un ángulo. O es el vértice de los ángulos α y β.

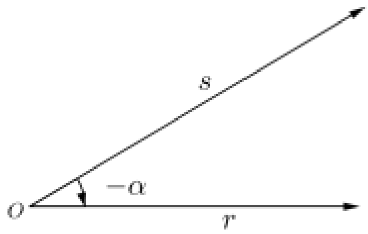


El ángulo α queda determinado al girar la semirrecta r, que se denomina **semirrecta origen**, hasta la semirrecta s, que se denomina **semirrecta extremo**.

1.2. Criterios de orientación de ángulo

Se considera que un ángulo α está orientado en **sentido positivo** cuando el giro desde la semirrecta origen a la semirrecta extremo se realiza en **sentido contrario a las agujas del reloj**. En caso contrario, se considera que el ángulo está orientado en sentido negativo.





1.3. Sistema de medida de ángulos

Sistema sexagesimal

En el sistema sexagesimal se establece que un ángulo completo mide 360 grados sexagesimales (360º). Por tanto, un grado sexagesimal (1º) resulta de dividir un ángulo completo en 360 partes iguales.

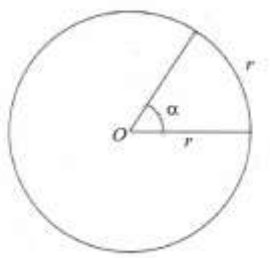
Un grado sexagesimal se divide en 60 minutos (60’) y cada minuto en 60 segundos (60’’)

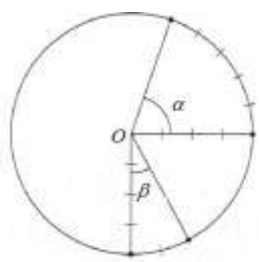
1º = 60’ 1’ = 60’’

Se deduce fácilmente que un ángulo recto mide 90º y uno llano 180º

Medida en radianes

El radián es el valor del ángulo central que abarca una longitud de arco igual al radio





$\alpha = 1$ radián

$\alpha = \frac{5}{4} = 1{,}2$ radianes $\beta = \frac{2}{4} = 0{,}5$ radianes

Observando los ejemplos anteriores se puede generalizar:

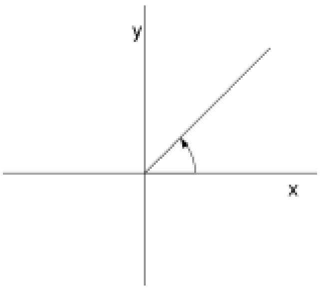
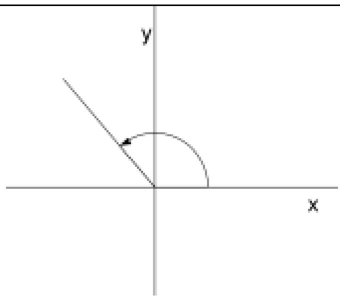
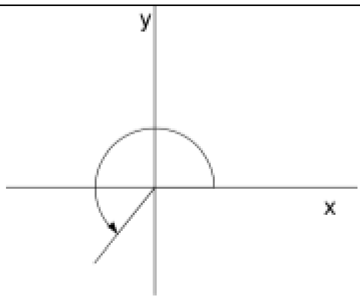
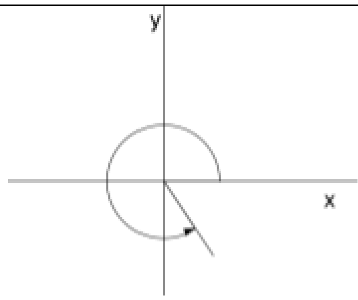
$$\boxed{\text{Ángulo (en radianes)} = \frac{\text{Longitud de arco}}{\text{radio}}}$$

Por tanto, ángulo completo $= \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2\pi$ rad $\quad \Rightarrow \quad \boxed{360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}}$

Luego un ángulo llano mide π rad $(180^{\circ} = \pi \text{ rad})$ y un ángulo recto $\dfrac{\pi}{2}$ rad $\left(90^{\circ} = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$

1.4. Reducción de ángulos al primer giro

- Para representar geométricamente un ángulo se sitúa sobre unos ejes cartesianos y se toma como semirrecta origen el semieje positivo de abscisas.

			
Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante

- Para representar geométricamente un ángulo mayor de 360º se le restan tantas vueltas completas como sea posible, asociándole de este modo un ángulo comprendido entre 0º y 360º.

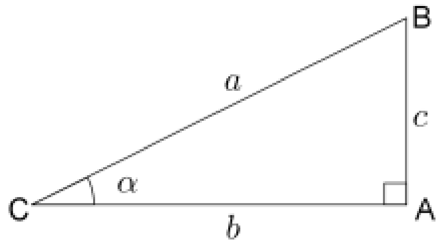
Ejemplo: Calcular la reducción al primer giro de un ángulo de 1940º

$$\begin{array}{r|l} 1940^{\circ} & 360^{\circ} \\ \cline{2-2} 140^{\circ} & 5 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 1940^{\circ} = 5 \cdot 360^{\circ} + 140^{\circ}$$

Este resultado indica que 1940º tiene 5 vueltas completas más 140º, es decir, el ángulo equivalente en el primer giro a 1940º es 140º

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Dado un ángulo agudo α cualquiera, se puede construir sobre él un triángulo rectángulo en el que dicho ángulo α sea uno de sus ángulos agudos.



A partir de la construcción de la figura anterior se establecen las siguientes definiciones:

- **Seno del ángulo α** → $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
- **Coseno del ángulo α** → $\cos\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
- **Tangente del ángulo α** → $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

Las definiciones anteriores no dependen de la dimensión del triángulo rectángulo que se construya sobre el ángulo α ya que todos los posibles triángulos rectángulos así construidos serán semejantes (son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual α). Por tanto, el valor que resulta de dichas definiciones será siempre el mismo.

La razón inversa del seno de α se llama **cosecante de α**, la inversa del coseno de α se llama **secante de α** y la inversa de la tangente de α se llama **cotangente de α**.

- **Cosecante del ángulo α** → $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
- **Secante del ángulo α** → $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- **Cotangente del ángulo α** → $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

2.1. Propiedades

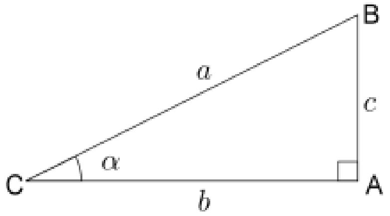
1) $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$ y $0 < \cos\alpha < 1$ para cualquier ángulo agudo α

Esta propiedad es consecuencia del hecho de que, en todo triángulo rectángulo, los catetos son menores que la hipotenusa.

2) Para cualquier ángulo agudo α se cumple:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{(Identidad fundamental de la Trigonometría)}$$

Demostración



$$\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha \underset{\substack{\text{definición}\\ \text{razones trigonom.}}}{=} \left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c^2+b^2}{a^2}\underset{\substack{\text{Teorema}\\ \text{Pitágoras}}}{=}\frac{a^2}{a^2}=1$$

3) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ y $\mathrm{cotg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}$ para cualquier ángulo agudo α

Esta propiedad se deduce de las definiciones de $\mathrm{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ y $\mathrm{cotg}\,\alpha$

4) $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$ para cualquier ángulo agudo α

Demostración

Dividiendo en la identidad fundamental por $\cos^2\alpha$ se tiene:

$$\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

5) $1+\mathrm{cotg}^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha$ para cualquier ángulo agudo α

Demostración

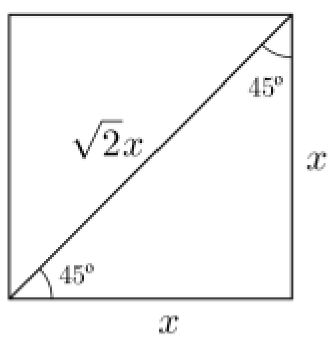
Dividiendo en la identidad fundamental por $\mathrm{sen}^2\alpha$ se tiene:

$$\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}\ \Rightarrow\ 1+\mathrm{cotg}^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha$$

2.3. Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º

- Para deducir las razones trigonométricas de 45º construimos un cuadrado de lado x y trazamos una de sus diagonales. La diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos ambos isósceles, es decir, triángulos rectángulos donde los dos ángulos agudos son de 45º.

  Por el Teorema de Pitágoras $\rightarrow$ diagonal $=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$



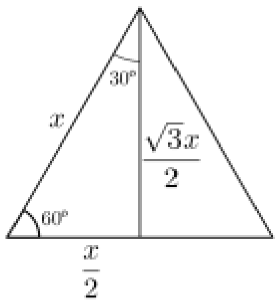
Por las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo se obtiene:

$$\mathrm{sen}45º=\frac{x}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\qquad \mathrm{cosec}\,45º=\frac{1}{\mathrm{sen}\,45º}=\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{tg}\, 45^\circ = \frac{x}{x} = 1 \qquad \mathrm{cotg}\, 45^\circ = \frac{1}{\mathrm{tg}\, 45^\circ} = 1$$

- Para deducir las razones trigonométricas de 30º y 60º se construye un triángulo equilátero de lado x y trazamos la altura por uno de sus vértices; ésta divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos iguales de ángulos agudos 60º y 30º. Usando el teorema de Pitágoras en uno de estos dos triángulos rectángulos tenemos: $\text{altura} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$



Por las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo se obtiene:

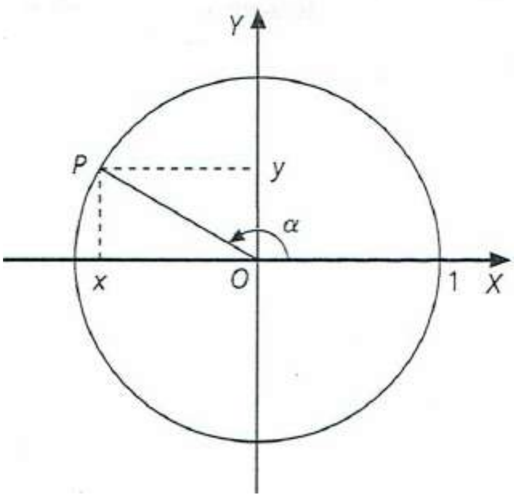
- $\mathrm{sen}\, 30^\circ = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \mathrm{cosec}\, 30^\circ = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, 30^\circ} = 2$
- $\cos 30^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \sec 30^\circ = \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\mathrm{tg}\, 30^\circ = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}x}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \mathrm{cotg}\, 30^\circ = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, 30^\circ} = \sqrt{3}$

- $\mathrm{sen}\, 60^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \mathrm{cosec}\, 60^\circ = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, 60^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\cos 60^\circ = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \sec 60^\circ = \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = 2$
- $\mathrm{tg}\, 60^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$ $\qquad \mathrm{cotg}\, 60^\circ = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, 60^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$\alpha = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$ rad	$\alpha = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$ rad	$\alpha = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec\alpha$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

En un sistema de ejes cartesianos se considera una circunferencia con centro en el origen de coordenadas. A cada punto P de la circunferencia se le asigna un ángulo orientado α del siguiente modo:



α es el ángulo determinado por el semieje positivo de abscisas y la semirrecta determinada por el punto P y el origen de coordenadas O.

A cada ángulo α le corresponde, en dicha circunferencia, un solo punto P.

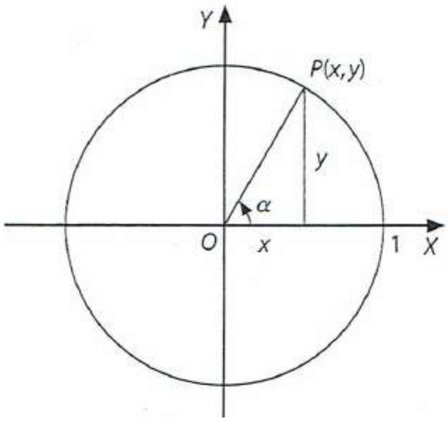
Para simplificar los cálculos se toma una circunferencia de radio unidad que se denomina **circunferencia goniométrica.**

Al punto P y al valor de las coordenadas les asignamos:

$$P \longrightarrow \text{ángulo } \alpha$$

$$(x\ ,y) \longrightarrow (\cos\alpha\ ,\operatorname{sen}\alpha)$$

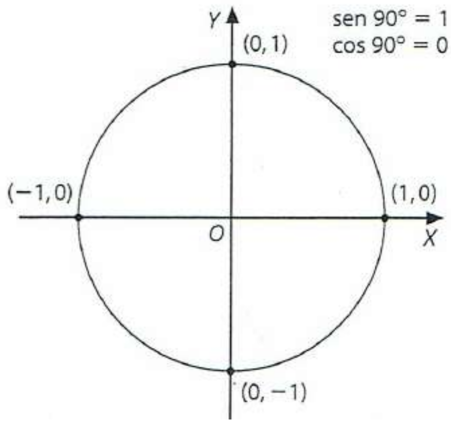
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha = x \\ \\ \operatorname{sen}\alpha = y \end{array}}$$



Esta forma de asignación es totalmente concordante con las definiciones dadas para las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Dado que el radio es 1 resulta:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad\qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

	$\alpha = 0^{o}$	$\alpha = 90^{o}$	$\alpha = 180^{o}$	$\alpha = 270^{o}$	$\alpha = 360^{o}$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	1	0	– 1	0
$\cos\alpha$	1	0	– 1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	No existe	0	No existe	0



3.1. Signo de las razones trigonométricas

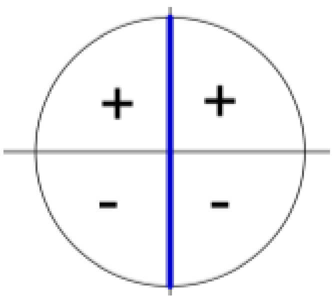
La intersección de la circunferencia con los ejes de coordenadas determina cuatro cuadrantes. El signo de las coordenadas de los puntos de cada cuadrante corresponde al signo de las razones trigonométricas de los ángulos que estos puntos determinan.

$$P(x, y) \longrightarrow \alpha$$

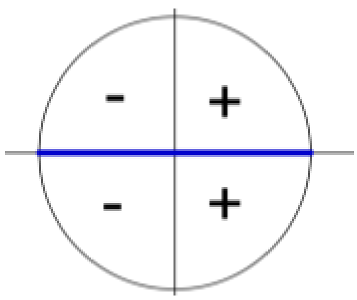
$$\cos\alpha = x$$

$$\operatorname{sen}\alpha = y$$

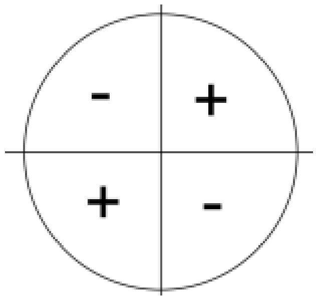
$\operatorname{sen}\alpha$



$\cos\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha$



3.1. Propiedades de las razones trigonométricas

1) $-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1$ y $-1 \le \cos\alpha \le 1$ para cualquier ángulo α

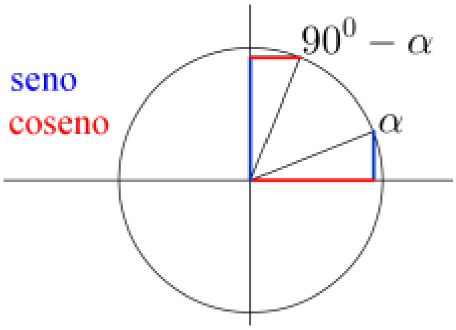
En particular, si α es un ángulo agudo $\Rightarrow \begin{cases} 0 < \text{sen}\,\alpha < 1 \\ 0 < \cos\alpha < 1 \end{cases}$

2) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para cualquier ángulo α **(Identidad fundamental de la Trigonometría)**	Esta propiedad nos permite hallar el coseno de un ángulo a partir del seno y viceversa
3) $\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ y $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ para cualquier ángulo α	Con estas identidades si conocemos dos de las razones trigonométricas que aparecen en ellas podemos hallar la tercera
4) $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ para cualquier ángulo α	Esta propiedad nos permite hallar la tangente de un ángulo a partir de la secante y viceversa
5) $1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$ para cualquier ángulo α	Esta propiedad nos permite hallar la cotangente de un ángulo a partir de la cosecante y viceversa
6) $\text{sen}\,\alpha \cdot \text{cosec}\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\alpha} \\ \text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \end{cases}$	La cosecante es la inversa del seno y viceversa
7) $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$	La secante es la inversa del coseno y viceversa
8) $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{cotg}\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{cotg}\,\alpha} \\ \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \end{cases}$	La cotangente es la inversa de la tangente y viceversa

4. RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DIFERENTES CUADRANTES

Primer cuadrante

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



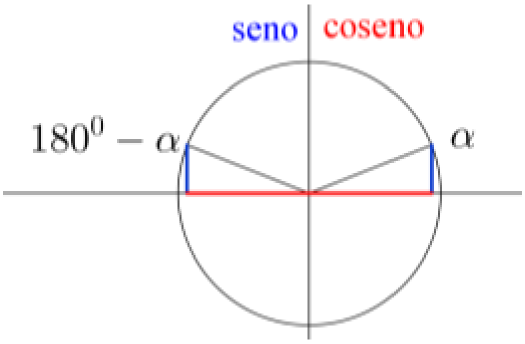
$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec \alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ $\quad$ $\sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

Segundo cuadrante

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

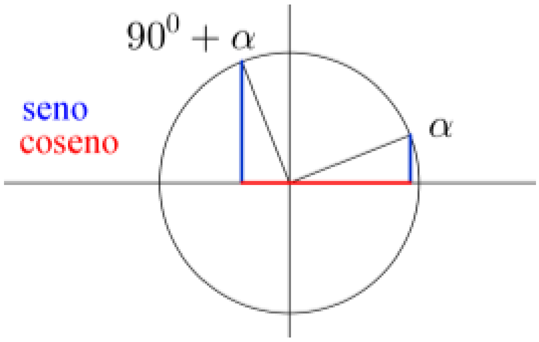


$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\quad$ $\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec \alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 90º



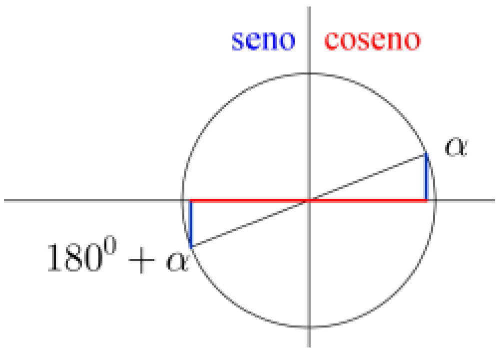
$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(90^\circ + \alpha) = \sec \alpha$

$\cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ $\quad$ $\sec(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Tercer cuadrante

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180º

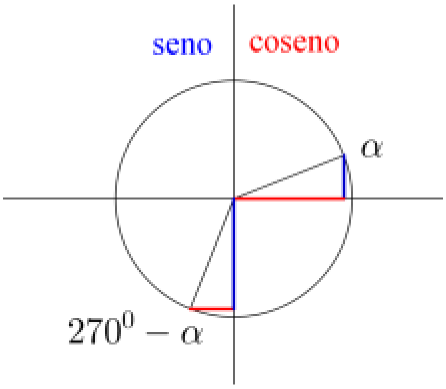


$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\quad$ $\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec \alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$

ÁNGULOS QUE SUMAN 270º



$\operatorname{sen}(270º - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270º - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{tg}(270º - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

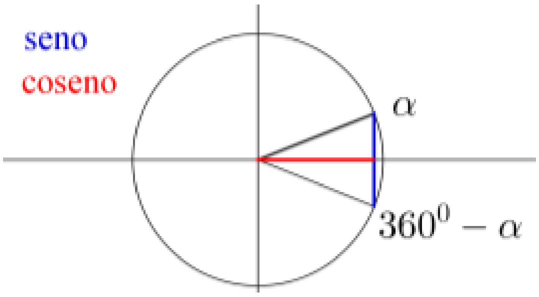
$\operatorname{cosec}(270º - \alpha) = -\sec\alpha$

$\sec(270º - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

$\operatorname{cotg}(270º - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Cuarto cuadrante

ÁNGULOS QUE SUMAN UN ÁNGULO COMPLETO O QUE SON OPUESTOS



$\operatorname{sen}(360º - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(360º - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

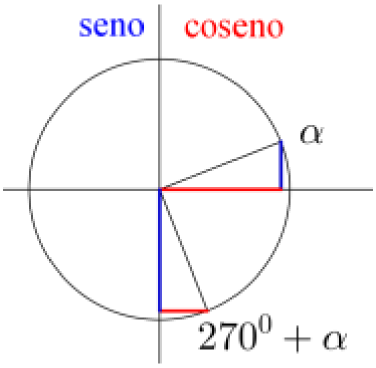
$\operatorname{tg}(360º - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cosec}(360º - \alpha) = \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

$\sec(360º - \alpha) = \sec(-\alpha) = \sec\alpha$

$\operatorname{cotg}(360º - \alpha) = \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 270º



$\operatorname{sen}(270º + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270º + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{tg}(270º + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{cosec}(270º + \alpha) = -\sec\alpha$

$\sec(270º + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$

$\operatorname{cotg}(270º + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo es hallar todos sus elementos desconocidos.

En un triángulo hay que determinar 6 elementos: sus tres ángulos y sus tres lados.

Para resolver un triángulo rectángulo se puede utilizar:

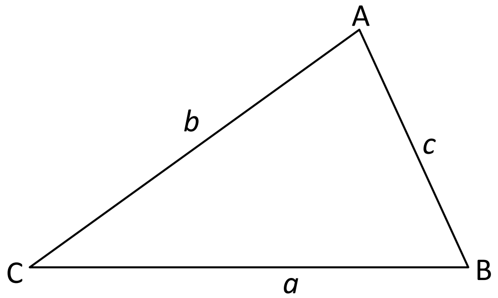
- La propiedad que indica que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º
- El teorema de Pitágoras
- Las definiciones de las razones trigonométricas

6. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Teorema de los senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\hat{\text{A}}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{\text{B}}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{\text{C}}}}$$



Teorema del coseno

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\text{A}}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{\text{B}}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{\text{C}}$$