1. (CTJ16) Responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Calcula todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfacen la igualdad $A^2+A=2I$, donde *I* es la matriz identidad.

b) (1 punto) Justifica que si *A* es una matriz cuadrada que cumple la igualdad $A^2+A=2I$, entonces *A* es invertible, y calcula la expresión de A^{-1} en función de las matrices *A* e *I*.

2. (CMJ16) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix}=10$, donde *x*, *y*, *z*, *a*, *b* y *c* ∈ **R**, calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1 punto cada determinante).

3. (PVJ16) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz no sea inversible.

b) (1,5 puntos) En caso de existir, calcula la inversa de *A* para $a = 2$.

4. (ARJ16) a) (2,5 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera, determina para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} -x+\lambda y+\lambda z=4 \\ \lambda x+\lambda y+z=6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z=3+\lambda \end{cases}$$

b) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

c) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 1$.

Examen de Matemáticas II (Álgebra) **Soluciones**

1. (CTJ16) Responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Calcula todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfacen la igualdad $A^2+A=2I$, donde I es la matriz identidad.

b) (1 punto) Justifica que si A es una matriz cuadrada que cumple la igualdad $A^2+A=2I$, entonces A es invertible, y calcula la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I.

Solución:

a) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^2+A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2I.$$

Todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ satisfacen la igualdad $A^2+A=2I$. No depende del valor de m.

b) Si $A^2+A=2I \Rightarrow A(A+I)=2I$.

Por tanto,

$$|A(A+I)|=|2I| \Rightarrow |A|\cdot|A+I|=2\cdot|I| \Rightarrow |A|\cdot|A+I|=2 \Rightarrow |A|\neq 0.$$

Luego, A es invertible. Su inversa será $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I)$.

En efecto: $A\cdot A^{-1}=A\cdot\frac{1}{2}(A+I)=\frac{1}{2}A(A+I)=\frac{1}{2}\cdot 2I=I$.

2. (CMJ16) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix}=10$, donde x, y, z, a, b y $c \in \mathbf{R}$, calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1 punto cada determinante).

Solución:

Se extrae “factor común” de las filas 1ª y 3ª: después se resta a la 2ª fila el doble de la 1ª.

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix}=7\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix}=7\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix}=7\cdot\frac{1}{5}\cdot 10=14.$$

Se desarrolla el determinante por la 1ª columna; después se intercambian las filas como se indica en cada caso (cada cambio de filas implica un cambio de signo):

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{F1\leftrightarrow F3}{=} +5\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3a & 2b & 3c \\ 3x & y & z \end{vmatrix} \underset{F3\leftrightarrow F2}{=} -5\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -5\cdot 3\cdot 10 = -150.$$

$\rightarrow$ En el último paso se ha extraído el factor 3 de la primera columna.

3. (PVJ16) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz no sea inversible.
b) (1,5 puntos) En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$.

<u>Solución</u>:

a) Una matriz cuadrada es inversible cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a(2a-2)+2-(a-2)-(2-a(a-2)) = 3a^2-5a+2$$

$$|A| = 3a^2-5a+2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6} = \begin{cases} 1 \\ 2/3 \end{cases}.$$

La matriz A no es invertible cuando $a = 1$ o $a = \frac{2}{3}$.

b) Si $a = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, pues $|A| = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 2 = 4$.

Su inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)^t$.

La matriz adjunta es $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. (ARJ16) a) (2,5 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera, determina para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} -x+\lambda y+\lambda z=4 \\ \lambda x+\lambda y+z=6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z=3+\lambda \end{cases}$$

b) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para λ = 2.
c) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para λ = 1.
<u>Solución</u>:
a) Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de ambas matrices sea 3, que es el número de incógnitas; será compatible indeterminado si tienen el mismo rango, pero menor 3; y será incompatible cuando el rango de *A* sea menor que el rango de *M*.

Las matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{array}\right)=M$

Conviene transformar ambas matrices: $A=\begin{array}{r} \\ \\ F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda+1 & 0 & 0 & -1+\lambda \end{array}\right)=M$

El determinante de *A*, $|A|=\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-\lambda+1)\left(\lambda-\lambda^2\right)$.

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 0.
Con esto:

- Si λ ≠ 1 y 0 ⇒ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = 1 se tendrá, sustituyendo en la matriz transformada (aunque puede hacerse en la primera):

$A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=M \Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 2. El sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

- Si λ = 0 se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=M \Rightarrow$ r(*A*) = 2; r(*M*) = 3. El sistema será incompatible.

En efecto: $|M_1|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0$.

b) Si λ = 2 el sistema es compatible determinado, equivalente a:

$$\begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 2x+2y+z=6 \\ -2x+2y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 6y+5z=14 \\ -2y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 4y+5z=14 \\ -z=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+13-10=4 \to x=-1 \\ 6y-25=14 \to y=13/2 \\ z=-5 \end{cases}$$

c) Si λ = 1 el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=6 \\ -x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \text{(Se elimina la tercera ecuación).}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} -x+y+z=4 \\ 2x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+y+z=4 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5-z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}.$$