1. (1,5 puntos) Para la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, calcula el valor de *a* para que $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

2. (1,25 puntos) Calcula el valor $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$.

3. (1,25 puntos) **(PVJ15)**

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=10$. Calcula, de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del siguiente determinante: $A=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

4. **(CMJ15)**

a) Despeja *X* en la ecuación matricial $X\cdot A+B=X$, donde *A*, *B* y *X* son matrices cuadradas de orden 3. (0,75 puntos)

b) Calcula *X*, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1,75 puntos)

5. Sea *a* un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

a) (2,5 puntos) Calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y determina para qué valores de *a* el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado

b) (1 punto) Resuelve el sistema anterior en el caso $a=2$.

Examen de Matemáticas II (Álgebra) Soluciones

1. (1,5 puntos) Para la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(A-I)=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & -a-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a=12 \\ a^2+a=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4; \quad a=-3 \\ a=4; \quad a=-5 \end{cases}$$

La única solución común es $a = 4$.

2. (1,25 puntos) Calcula el valor $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$.

Solución:

Hay diferentes formas de hacerlo, pero en todas deben aplicarse algunas transformaciones de Gauss. Aquí, si se resta la cuarta columna a las otras tres, queda:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}= \text{(Por } F1\text{)} = -1\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^2b.$$

3. (1,25 puntos) **(PVJ15)**

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=10$. Calcula, de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del siguiente determinante: $A=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

Solución:

Se aplicarán las transformaciones de Gauss, que se indican en cada caso:

$$A=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}= \text{(se extrae el factor 2 de la primera fila)} =$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}= \text{(se resta la fila 1ª a la 2ª y a la 3ª)} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}=$$

$$= \text{(se extrae el factor } -1 \text{ de la 3ª fila)} = 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 10 = -20 .$$

4. **(CMJ15)**
a) Despeja *X* en la ecuación matricial $X\cdot A + B = X$, donde *A*, *B* y *X* son matrices cuadradas de orden 3. (0,75 puntos)

b) Calcula *X*, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1,75 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $X\cdot A + B = X \Rightarrow X\cdot A - X = -B \Rightarrow X\cdot A - X\cdot I = -B \Rightarrow X\cdot(A-I) = -B \Rightarrow X = -B\cdot(A-I)^{-1}$.

Esta solución supone que existe $(A-I)^{-1}$, lo que exige que $|A-I| \neq 0$.

Si la condición anterior no se cumpliera, el valor de la matriz *X* habría que determinarlo planteando un sistema de ecuaciones.

b) Para las matrices dadas: $(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $|A-I| = -1$, la matriz tiene inversa.

La inversa es: $(A-I)^{-1} = \dfrac{1}{|A-I|}\cdot\left((A-I)_{ij}\right)^t = \dfrac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X = -B\cdot(A-I)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sea *a* un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

a) (2,5 puntos) Calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y determina para qué valores de *a* el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado

b) (1 punto) Resuelve el sistema anterior en el caso *a* = 2**.**

<u>Solución</u>:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2) = (a-1)(a-1)(a+2).$$

La descomposición factorial se hace aplicando el teorema del resto: viendo que una raíz es $a = 1$, dividiendo por Ruffini y resolviendo la ecuación de segundo grado.
Para estudiar la compatibilidad del sistema hay que estudiar los rangos de las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, respectivamente. El sistema es compatible cuando dichas matrices tengan el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución. Con esto:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) = M$$

Como se ha visto, $|A| = (a-1)(a-1)(a+2) \Rightarrow |A| = 0$ si $a = 1$ (raíz doble) o $a = -2$.
Luego:

- Si $a \neq 1$ y $-2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M \Rightarrow$ r(A) = r(M) = 1.

El sistema será compatible indeterminado con dos grados de libertad.
El sistema inicial quedará reducido a $\{x + y + z = 1$.

- Si $a = -2$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2; pero el rango de M es 3, pues el menor de M,

$$|M1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 3 \neq 0.$$

En este caso el sistema es incompatible.

b) Para $a = 2$, el sistema es: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ (Por Gauss) $\begin{array}{r} E1 - 2E3 \\ E2 - E3 \\ \end{array} \begin{cases} -y - 3z = -7 \\ y - z = -2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} E1 + E2 \\ E2 - E3 \\ \end{array} \begin{cases} -4z = -9 \\ y - z = -2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 9/4 \\ y - 9/4 = -2 \to y = 1/4 \\ x + y + 2z = 4 \to x + 1/4 + 18/4 = 4 \to x = -3/4 \end{cases}.$$

L solución es: $x = -\dfrac{3}{4}$; $y = \dfrac{1}{4}$; $z = \dfrac{9}{4}$.