

EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1 Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.

a)  $f(x) = 3x - 1$

b)  $g(x) = |x|$

c)  $h(x) = x^3$

a)  $D(f) = \mathbf{R}$ ; Recorrido  $(f) = \mathbf{R}$

b)  $D(g) = \mathbf{R}$ ; Recorrido  $(g) = [0, +\infty)$

c)  $D(h) = \mathbf{R}$ ; Recorrido  $(h) = \mathbf{R}$

10.2 Calcula el dominio de estas funciones.

a)  $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$

b)  $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

c)  $h(x) = \frac{2x + 3}{x(x^2 + 1)}$

d)  $j(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

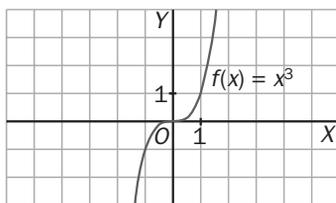
a)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

b)  $D(g) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

c)  $D(h) = \mathbf{R} - \{0\}$

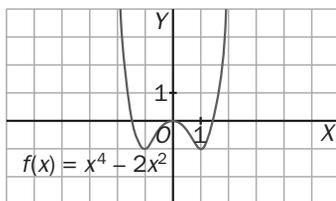
d)  $D(j) = \mathbf{R}$

10.3 Estudia el crecimiento o decrecimiento de la función  $f(x) = x^3$ .



La función  $f(x) = x^3$  es constantemente creciente, pues  $TV [x, x + h] = (x + h)^3 - x^3 > 0$ , ya que si  $h > 0$ ,  $x + h > x$ , y, en consecuencia,  $(x + h)^3 > x^3$ .

10.4 Indica en qué intervalos es creciente o decreciente la función  $y = x^4 - 2x^2$ .

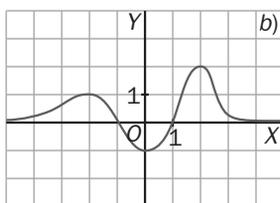
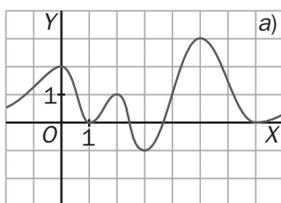


A la vista de la gráfica se observa que:

$f(x)$  es creciente en:  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ .

$f(x)$  es decreciente en:  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ .

10.5 Señala los máximos y mínimos de estas funciones.



a) La función presenta máximos relativos en los puntos  $(0, 2)$ ,  $(2, 1)$  y  $(5, 3)$ ; un máximo absoluto en  $(5, 3)$ ; mínimos relativos en  $(1, 0)$ ,  $(3, -1)$  y  $(7, 0)$  y un mínimo absoluto en  $(3, -1)$ .

b) La función presenta máximos relativos en los puntos  $(-2, 1)$  y  $(2, 2)$ ; un máximo absoluto en  $(2, 2)$ ; un mínimo relativo en  $(0, -1)$  y un mínimo absoluto en  $(0, -1)$ .

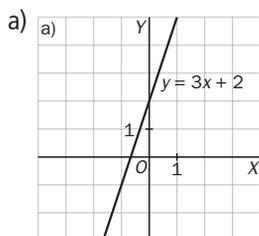
10.6 Indica los máximos y mínimos de estas funciones.

a)  $y = 3x + 2$

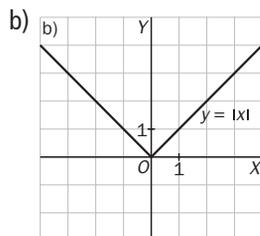
b)  $y = |x|$

c)  $y = (x - 2)^2 + 3$

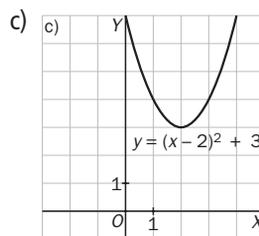
d)  $y = x^2 - 4$



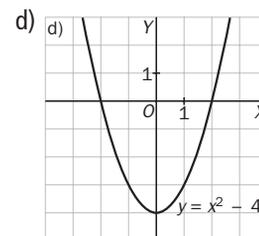
No tiene ni máximos ni mínimos.



Presenta un mínimo absoluto en el origen.

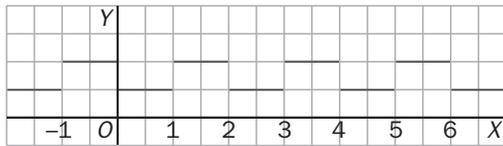


Presenta un mínimo absoluto en  $(2, 3)$ .



Presenta un mínimo absoluto en  $(0, -4)$ .

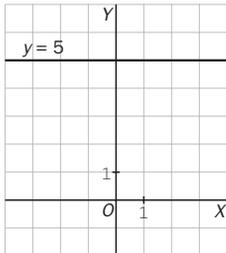
10.7 Indica si es periódica la siguiente función. En caso afirmativo, calcula su período.



La función dada por su gráfica es periódica, de período 2, ya que  $f(x) = f(x + 2)$ .

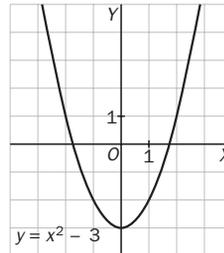
10.8 Estudia si están acotadas y qué tipo de acotación presentan las siguientes funciones.

a)  $y = 5$



Está acotada superior e inferiormente.

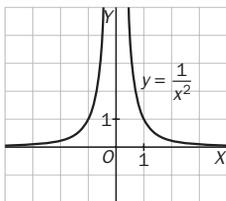
b)  $y = x^2 - 3$



Está acotada inferiormente.

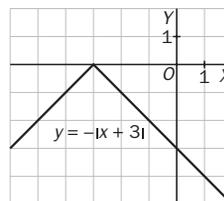
10.9 Comprueba si están acotadas y qué tipo de acotación presentan las siguientes funciones.

a)  $y = \frac{1}{x^2}$



Está acotada inferiormente.

b)  $y = -|x + 3|$



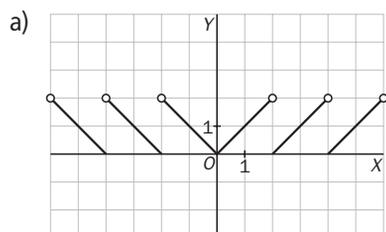
Está acotada superiormente.

10.10 La función  $f(x)$  asocia a cada número real su parte decimal. Por ejemplo:  $f(2, 6) = 0,6$ ;  $f(-4, 2) = 0,2$ .

a) Dibuja su gráfica.

b) ¿Es periódica? En caso afirmativo, indica su período.

c) ¿Está acotada?



b) No es periódica.

c) Está acotada superior e inferiormente.

10.11 ¿Presentan algún tipo de simetría estas funciones?

a)  $y = 3x$

b)  $y = 3x + 2$

c)  $y = 5x^2 + 3$

a)  $f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$ . Simetría impar.

b)  $f(-x) = 3(-x) + 2 = -3x + 2$ . No presenta ninguna simetría.

c)  $f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3 = f(x)$ . Simetría par.

10.12 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a)  $y = |x|$

b)  $y = -3x^2 + 1$

c)  $y = -2x^3 + 2$

a)  $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ . Simetría par.

b)  $f(-x) = -3(-x)^2 + 1 = -3x^2 + 1$ . Simetría par.

c)  $f(-x) = -2(-x)^3 + 2 = 2x^3 + 2$ . No presenta simetrías.

10.13 Si  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = 3x$  y  $h(x) = x^2 + 4$ , calcula las siguientes funciones.

a)  $3f$

b)  $f + 2g$

c)  $g \cdot h$

d)  $\frac{g}{h}$

a)  $3f(x) = 3 \cdot f(x) = 3|x|$

c)  $(g \cdot h)(x) = 3x \cdot (x^2 + 2) = 3x^3 + 6x$

b)  $(f + 2g)(x) = f(x) + 2g(x) = |x| + 2 \cdot 3x = |x| + 6x$

d)  $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$

10.14 Dadas las funciones  $f(x) = 5x^2 + 3$  y  $g(x) = x + 7$ :

a) Calcula las funciones  $g \circ f$  y  $f \circ g$ .

b) ¿Es conmutativa la composición de funciones?

a)  $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(5x^2 + 3) = 5x^2 + 3 + 7 = 5x^2 + 10$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 7) = 5(x + 7)^2 + 3 = 5(x^2 + 14x + 49) + 3 = 5x^2 + 70x + 248$

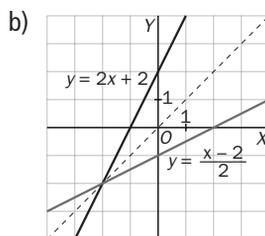
b) Como  $g \circ f \neq f \circ g$ , se deduce que la composición de funciones no es conmutativa.

10.15 Considera la función  $f(x) = y = 2x + 2$ .

a) Halla la función recíproca de  $f$ .

b) Representa la función  $f$  y su recíproca. ¿Cómo son respecto de la recta  $y = x$ ?

a)  $y = 2x + 2 \Rightarrow 2x = y - 2 \Rightarrow x = \frac{y - 2}{2} \Rightarrow y = \frac{x - 2}{2}$



Son simétricas respecto de  $y = x$ .

10.16 Dada la función  $f(x) = 3x^2 - 5$ :

a) Halla la función  $f^{-1}$ .

b) Calcula la composición de estas funciones:  $f^{-1} \circ f$        $f \circ f^{-1}$

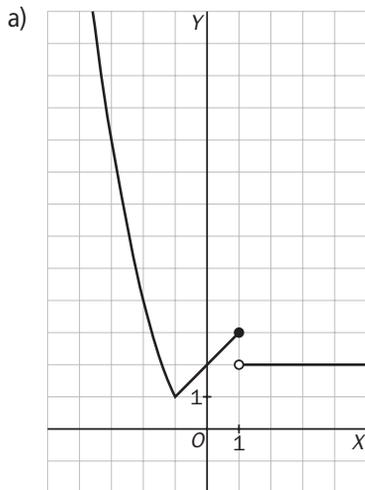
a)  $y = 3x^2 - 5 \Rightarrow 3x^2 = y + 5 \Rightarrow x^2 = \frac{y + 5}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y + 5}{3}} \Rightarrow y = + \sqrt{\frac{x + 5}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x) = + \sqrt{\frac{x + 5}{3}}$

b)  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x^2 - 5) = + \sqrt{\frac{3x^2 - 5 + 5}{3}} = + \sqrt{x^2} = x$

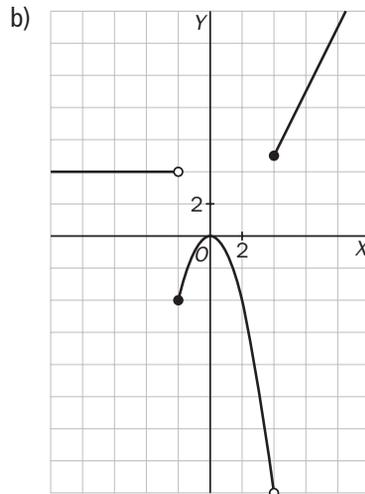
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{\frac{x + 5}{3}}\right) = 3\left(\sqrt{\frac{x + 5}{3}}\right)^2 - 5 = 3 \frac{x + 5}{3} - 5 = x$

10.17 Representa estas funciones definidas a trozos.

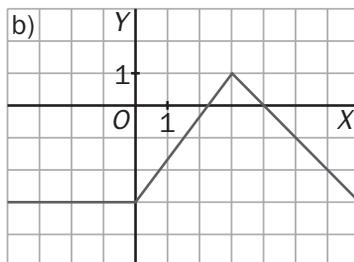
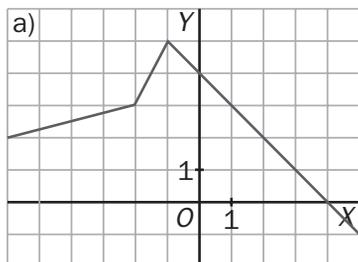
$$a) y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$b) y = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ -x^2 & -2 \leq x < 4 \\ 2x - 3 & x \geq 4 \end{cases}$$



10.18 Observa estas dos representaciones gráficas y escribe las fórmulas de las funciones a las que corresponden.



a) Ecuación de recta que pasa por  $(-6, 2)$  y  $(-2, 3)$ :

$$m = \frac{3 - 2}{-2 - (-6)} = \frac{1}{4}; y - 2 = \frac{1}{4}(x + 6); y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

Ecuación de recta que pasa por  $(-2, 3)$  y  $(-1, 5)$ :

$$m = \frac{5 - 3}{-1 - (-2)} = 2; y - 3 = 2(x + 2); y = 2x + 7$$

Ecuación de recta que pasa por  $(-1, 5)$  y  $(4, 0)$ :

$$y = -x + 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} & x \leq -2 \\ 2x + 7 & -2 < x < -1 \\ -x + 4 & x \geq -1 \end{cases}$$

b) Función constante  $-3$ :

$$y = -3$$

Ecuación de recta que pasa por  $(0, -3)$  y  $(3, 1)$ :

$$m = \frac{1 - (-3)}{3 - 0} = \frac{4}{3}; y + 3 = \frac{4}{3}x; y = \frac{4}{3}x - 3$$

Ecuación de la recta que pasa por  $(3, 1)$  y  $(4, 0)$ :

$$y = -x + 4$$

$$f(x) = \begin{cases} -3 & x < 1 \\ \frac{4}{3}x - 3 & 1 \leq x < 3 \\ -x + 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**10.19** Un automóvil parte desde Logroño hacia Palencia a 100 km/h. Simultáneamente, otro sale desde Palencia hacia Logroño a 60 km/h.

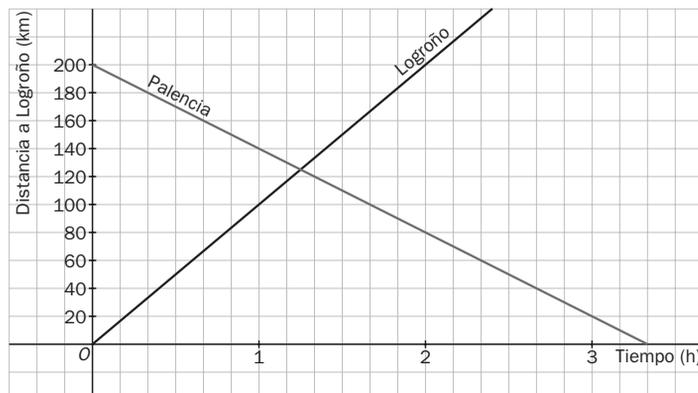
Sabiendo que ambas capitales distan 200 kilómetros, ¿a qué distancia de Logroño se producirá el encuentro?

Representamos las gráficas distancia-tiempo de cada vehículo, considerando la distancia de los vehículos a Logroño. Para ello solo necesitamos calcular dos valores en cada caso.

Vehículo que sale desde Logroño	
t	d
0	0
2	200

Vehículo que sale desde Palencia	
t	d
0	200
2	80

Se encuentran a 125 km de Logroño.



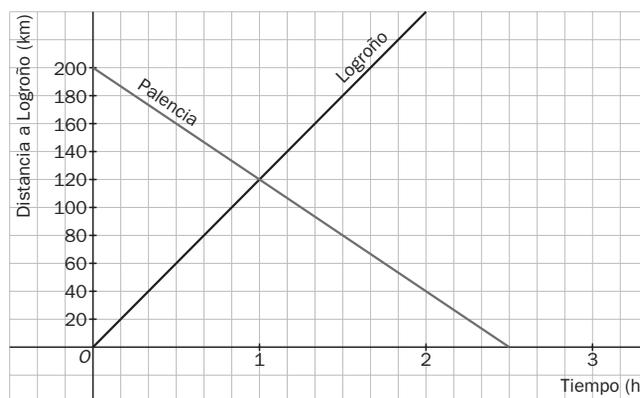
**10.20** Resuelve de nuevo la situación del ejercicio anterior si la velocidad de cada coche aumentase en 20 km/h por hora.

¿A qué distancia de Logroño se cruzarían en este caso?

Vehículo que sale desde Logroño	
t	d
0	0
1	120

Vehículo que sale desde Palencia	
t	d
0	200
2	20

Se encuentran a 120 km de Logroño.



## ACTIVIDADES

### EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

#### Concepto de función

**10.21** Construye una tabla de 6 valores para las funciones:

a)  $f(x) = 5x + 3$

b)  $g(x) = x^2 + 2x$

c)  $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$

d)  $y = \sqrt{10 - x}$

a)

x	0	1	2	3	4	5
y	3	8	13	18	23	28

c)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-3	7	$\frac{9}{2}$	18

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-1	0	3	8	15

d)

x	-15	-6	1	6	9	10
y	5	4	3	2	1	0

10.22 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = 4x - 6$

c)  $y = \sqrt{x^2 + 2}$

e)  $h(x) = \sqrt{3 + 2x}$

b)  $y = x^2 + 3$

d)  $g(x) = \sqrt{15 - 3x}$

f)  $y = \sqrt{8x - 6}$

a)  $D(f) = \mathbf{R}; R(f) = \mathbf{R}$

c)  $D(f) = \mathbf{R}; R(f) = [\sqrt{2}, +\infty)$

e)  $D(h) = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right); R(h) = [0, +\infty)$

b)  $D(f) = \mathbf{R}; R(f) = [3, +\infty)$

d)  $D(g) = (-\infty, 5]; R(g) = [0, +\infty)$

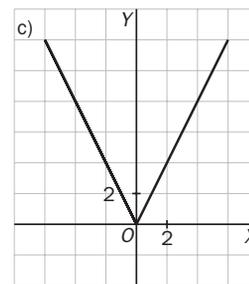
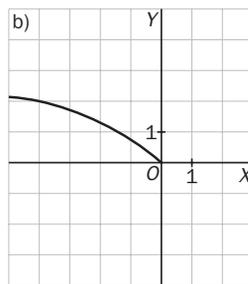
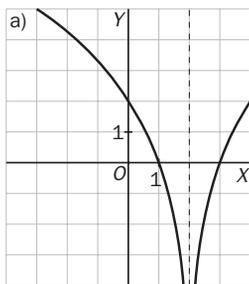
f)  $D(f) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right); R(f) = [0, +\infty)$

10.23 Dibuja una función:

a) Que su dominio sea  $\mathbf{R} - \{2\}$  y su recorrido  $\mathbf{R}$ .

b) Que su dominio sea  $(-\infty, 0]$ .

c) Que su dominio sea  $[-6, 6]$  y su recorrido  $[0, 12]$ .



10.24 Calcula el dominio de estas funciones.

a)  $f(x) = \frac{2x - x^3}{4x^2 + 6}$

c)  $g(x) = \frac{x - 2}{3x^2 - 3}$

e)  $h(x) = \frac{x}{2x + 8}$

b)  $y = \frac{1}{x^3 - 8}$

d)  $y = \frac{1}{2 - x}$

f)  $y = \frac{3x^2 - 6}{x^2 + 5x + 4}$

a)  $D(f) = \mathbf{R}$

c)  $D(g) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

e)  $D(h) = \mathbf{R} - \{-4\}$

b)  $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

d)  $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

f)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-4, -1\}$

10.25 Escribe la fórmula de una función:

a) Cuyo dominio sea  $[3, +\infty)$ .

b) Cuyo dominio sea  $\mathbf{R}$ , y su recorrido,  $\mathbf{R}^+$ .

c) Cuyo dominio sea  $[0, +\infty)$ , y su recorrido,  $\mathbf{R}^-$ .

a)  $f(x) = \sqrt{x - 3}$

b)  $g(x) = x^2$

c)  $h(x) = -\sqrt{x}$

10.26 Halla el dominio de estas funciones.

a)  $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 10}$

b)  $y = \frac{1 - 5x - x^2}{x^3 + 3x^2 - 4x}$

c)  $y = \frac{x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

d)  $y = \frac{2}{\sqrt{x - 7}}$

a)  $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{5}{2}, -2\right\}$

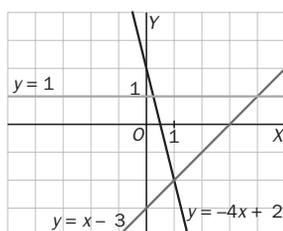
b)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-4, 0, 1\}$

c)  $D(f) = \mathbf{R} - \{1, 4\}$

d)  $D(f) = (7, +\infty)$

## Características de las funciones

10.27 Dibuja las funciones  $y = x - 3$ ,  $y = 2 - 4x$  e  $y = 1$ . A la vista de la gráfica, ¿qué tipo de crecimiento presenta cada una de ellas?



$y = x - 3$ , creciente

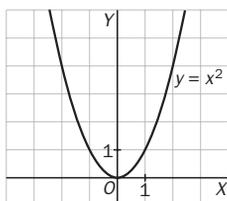
$y = 2 - 4x$ , decreciente

$y = 1$ , constante

10.28 Teniendo en cuenta su gráfica, estudia la función  $y = x^2$  en los intervalos  $[0; 0,5]$  y  $[-0,5; 0]$ .

a) ¿Es creciente o decreciente?

b) ¿Qué se puede afirmar del punto  $(0, 0)$ ?



a) La función es creciente en  $[0; 0,5]$  y decreciente en  $[-0,5; 0]$ .

b) El punto  $(0, 0)$  es un mínimo de la función.

10.29 Para cada una de las funciones representadas a continuación, estudia:

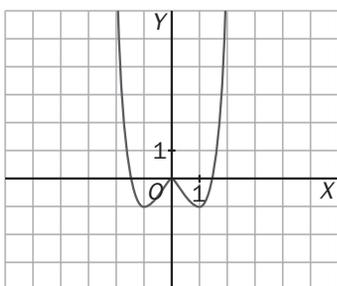
a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Los máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) La simetría.

d) Si están acotadas y, en su caso, el tipo de acotación que presentan.

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$



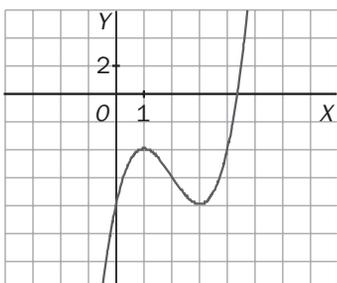
a) Crece en  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ . Decrece en  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ .

b)  $(-1, -1)$  y  $(1, -1)$  son mínimos relativos y absolutos.  $(0, 0)$  es máximo relativo. No tiene máximos absolutos.

c) Presenta simetría par.

d) Está acotada inferiormente.

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$



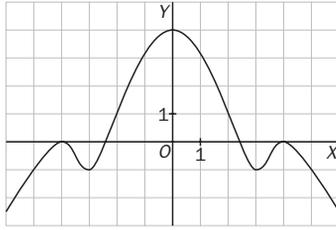
a) Decrece en  $(1, 3)$ . Crece en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

b)  $(3, -8)$  es un mínimo relativo, y  $(1, -4)$  es un máximo relativo. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

c) No presenta simetrías.

d) No está acotada.

- 10.30 Dibuja una función con las siguientes características: tiene un mínimo relativo en  $(-3, -1)$ ; un máximo relativo en  $(0, 4)$ , y es par.



- 10.31 Estudia la simetría de las siguientes funciones, indicando en caso afirmativo de qué tipo de simetría se trata.

a)  $f(x) = x^3 - 4x$       b)  $g(x) = 2 - x^4$       c)  $h(x) = \frac{3}{x-1}$       d)  $j(x) = 1 - x^3$

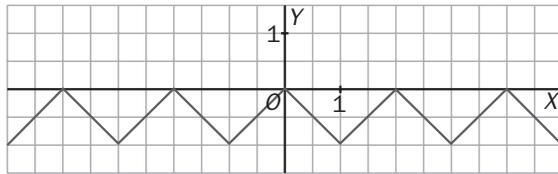
a)  $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x) \Rightarrow$  Es impar.

b)  $f(-x) = 2 - (-x)^4 = 2 - x^4 = f(x) \Rightarrow$  Es par.

c)  $f(-x) = \frac{3}{-x-1} \neq f(x) \Rightarrow$  No es par.  $f(-x) = \frac{3}{-x-1} \neq -f(x) \Rightarrow$  No es impar.

d)  $f(-x) = 1 - (-x)^3 = 1 + x^3 \neq f(x) \Rightarrow$  No es par.  $f(-x) = 1 - (-x)^3 = 1 + x^3 \neq -f(x) \Rightarrow$  No es impar.

- 10.32 Observa la gráfica siguiente:



- a) Si es una función periódica, indica su período.  
 b) ¿Qué valor toma la función cuando  $x$  es par? ¿Y cuando  $x$  es impar?  
 c) Indica una cota superior y una cota inferior de la función.

a) Es periódica de período  $T = 2$ .

b) Cuando  $x$  es par,  $f(x) = 0$ , y cuando  $x$  es impar,  $f(x) = -1$ .

c) 0 es una cota superior, y  $-1$  es una cota inferior.

## Operaciones con funciones

- 10.33 Dadas  $f(x) = 3x - 6$  y  $g(x) = x^2 + 2x - 4$ , calcula:

a)  $(2f + g)(x)$       b)  $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$       c)  $(4g - 3f)(x)$       d)  $(g \circ f)(x)$       e)  $(f \cdot g)(x)$       f)  $f^{-1}(x)$

a)  $(2f + g)(x) = 6x - 12 + x^2 + 2x - 4 = x^2 + 8x - 16$

b)  $(4g - 3f)(x) = 4x^2 + 8x - 16 - 9x + 18 = 4x^2 - x + 2$

c)  $(f \cdot g)(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12x - 6x^2 - 12x + 24 = 3x^3 - 24x + 24$

d)  $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{3x - 6}{x^2 + 2x - 4}$

e)  $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x - 6) = (3x - 6)^2 + 2 \cdot (3x - 6) - 4 = 9x^2 - 36x + 36 + 6x - 12 = 9x^2 - 30x + 24$

f)  $y = 3x - 6 \Rightarrow 3x = y + 6 \Rightarrow x = \frac{y + 6}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 6}{3}$

10.34 Si  $f(x) = \frac{3}{x+5}$  y  $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ , calcula:

a)  $(2f - 4g)(x)$

b)  $(f \cdot g)(x)$

c)  $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

$$a) (2f - 4g)(x) = \frac{6}{x+5} - \frac{4x^2+4}{x} = \frac{6x - 4x^3 - 20x^2 - 4x - 20}{x^2+5x} = \frac{-4x^3 - 20x^2 + 2x - 20}{x^2+5x}$$

$$b) (f \cdot g)(x) = \frac{3x^2+3}{x^2+5x}$$

$$c) \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2+1}{x} : \frac{3}{x+5} = \frac{(x^2+1)(x+5)}{3x} = \frac{x^3+5x^2+x+5}{3x}$$

10.35 Comprueba si  $f(x) = 2x^2 - 4$  y  $g(x) = \sqrt{\frac{x+4}{2}}$  son funciones recíprocas.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x^2 - 4) = \sqrt{\frac{2x^2 - 4 + 4}{2}} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{\frac{x+4}{2}}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{x+4}{2}}\right)^2 - 4 = x$$

Son recíprocas porque su composición es la identidad.

10.36 Calcula las imágenes de  $x = 0$ ,  $x = -1$  y  $x = 2$  mediante las funciones  $(g \circ f)(x)$  y  $g^{-1}(x)$ , siendo  $f(x) = 3x^2 + 4x$  y  $g(x) = \sqrt{x+9}$ .

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = \sqrt{0+9} = 3$$

$$(g \circ f)(-1) = g[f(-1)] = g(-1) = \sqrt{-1+9} = \sqrt{8}$$

$$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(20) = \sqrt{20+9} = \sqrt{29}$$

$$y = \sqrt{x+9} \Rightarrow y^2 = x+9 \Rightarrow x = y^2 - 9 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 - 9$$

$$g^{-1}(0) = 0^2 - 9 = -9$$

$$g^{-1}(-1) = (-1)^2 - 9 = -8$$

$$g^{-1}(2) = 2^2 - 9 = -5$$

10.37 Si  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$  y  $g(x) = \sqrt{5-2x}$ , calcula:

a)  $f^{-1}(x)$

c)  $f^{-1}(3)$

b)  $g^{-1}(x)$

d)  $g^{-1}(2)$

$$a) y = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow yx + 3y = x - 1 \Rightarrow yx - x = -1 - 3y \Rightarrow x(y-1) = -1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1+3y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{1-x}$$

$$b) y = \sqrt{5-2x} \Rightarrow y^2 = 5-2x \Rightarrow 2x = 5-y^2 \Rightarrow x = \frac{5-y^2}{2}$$

$$c) f^{-1}(3) = \frac{1+3 \cdot 3}{1-3} = \frac{10}{-2} = -5$$

$$d) g^{-1}(2) = \frac{5-2^2}{2} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

10.38 Calcula  $(g \circ f)(-2)$  y  $(f \circ g)(1)$ , siendo  $f(x) = 2x^2 - 9$  y  $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ .

$$(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g(-1) = \frac{-1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(1) = -7$$

## Funciones definidas a trozos

10.39 Considera la función  $f(x) = \begin{cases} 8 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 9 & \text{si } x > -1 \end{cases}$  y calcula  $f(3)$ ,  $f(10)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-1)$  y  $f\left(\frac{3}{4}\right)$ .

$$f(3) = 3 \cdot 3^2 + 9 = 36$$

$$f(10) = 3 \cdot 10^2 + 9 = 309$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 + 9 = 9$$

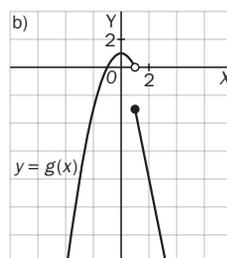
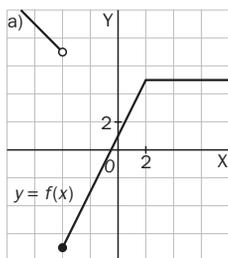
$$f(-1) = 8 - (-1)^2 = 7$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 8 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{23}{16}$$

10.40 Dibuja las siguientes funciones definidas a trozos.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -4 \\ 2x + 1 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 - 5x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



10.41 Calcula la imagen de  $x = 2$  en cada una de las funciones siguientes.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x < 2 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} 6x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} 8x^3 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2 + 7x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } f(2) = -2$$

$$\text{b) } g(2) = 0$$

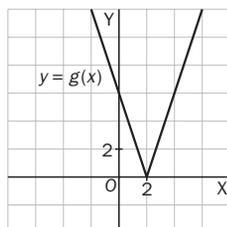
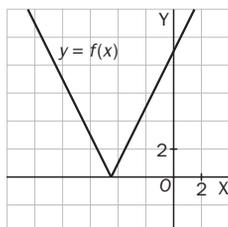
$$\text{c) } h(2) \text{ no se puede calcular.}$$

10.42 Dibuja  $f(x) = |2x + 9|$  y  $g(x) = |6 - 3x|$ . Indica para cada una de ellas:

a) ¿Qué valores de  $x$  tienen por imagen 1?

b) ¿Cuáles tienen por imagen 0?

c) ¿Y cuáles son las que tienen por imagen  $-2$ ?



$$\text{a) } x = -4 \text{ y } x = -5 \text{ en } f(x); x = \frac{5}{3} \text{ y } x = \frac{7}{3} \text{ en } g(x).$$

$$\text{b) } x = \frac{-9}{2} \text{ en } f(x), \text{ y } x = 2 \text{ en } g(x).$$

c) Ningún valor de  $x$  puede tener como imagen  $-2$  porque el valor absoluto de un número nunca es negativo.

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

10.43 Si una función es periódica de período 4, ¿es suficiente conocer su gráfica en el intervalo  $[-2, 2]$  para poder representarla en  $\mathbb{R}$ ?

Sí, ya que la amplitud del intervalo es 4, y si es periódica, basta conocer su gráfica en un intervalo de amplitud igual al período para dibujarla en  $\mathbb{R}$ .

10.44 Si la imagen de 0 mediante una función,  $f$ , es 3, ¿qué se puede afirmar de la imagen de 3 respecto de la función recíproca de  $f$ ,  $f^{-1}$ ?

Que es 0.

10.45 ¿Qué relación tienen dos funciones que son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante?

Son recíprocas.

10.46 Una función continua está definida en  $\mathbb{R}$ , es creciente en  $(-\infty, -3)$  y en  $(4, +\infty)$ , y decreciente en  $(-3, 4)$ . ¿Tiene máximos y/o mínimos relativos?

Sí. Tiene un mínimo relativo en  $x = -3$  y un máximo relativo en  $x = 4$ .

10.47 El recorrido de una función es  $(-1, 1)$ . Razona si está acotada superior y/o inferiormente.

Está acotada superior e inferiormente, ya que por su recorrido se observa que la función no toma valores menores e iguales que  $-1$  ni mayores o iguales que  $1$ .

10.48 Si una función es creciente en  $(-\infty, 0)$  y decreciente en  $(0, +\infty)$ , ¿se puede afirmar que tiene un máximo en  $x = 0$ ?

No, porque puede ser que no esté definida en  $x = 0$ .

10.49 Demuestra si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a)  $y = |x|$  es una función impar.

b)  $y = x^2 + 4$  es creciente en  $\mathbb{R}$ .

c)  $y = 1 - x^2$  está acotada superiormente.

d)  $y = \frac{2x}{x^3 - x}$  es una función par.

a) Falsa.  $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

b) Falsa. Es creciente solo en  $(0, +\infty)$ .

Si  $0 < a < b$ , entonces  $TV[a, b] = f(b) - f(a) = b^2 + 4 - a^2 - 4 = (b + a) \cdot (b - a) > 0$ .

Si  $a < b < 0$ , entonces  $TV[a, b] = f(b) - f(a) = b^2 + 4 - a^2 - 4 = (b + a) \cdot (b - a) < 0$ .

c) Verdadera. 1 es una cota superior de la función, puesto que  $1 - x^2 > 1$ .

d) Verdadera.  $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^3 + x} = \frac{-2x}{-(x^3 - x)} = f(x)$ .

10.50 El dominio de una función  $f(x)$  es  $\mathbb{R}$ , y el de otra,  $g(x)$  es  $\mathbb{R} - \{2\}$ . ¿Se puede calcular  $(f + g)(2)$ ? ¿Y  $(f \circ g)(2)$ ?

No se puede calcular ninguno de los dos valores, ya que en ambos casos es necesario hallar  $g(2)$ , y la función  $g$  no está definida para ese valor de  $x$ .

10.51 La función  $f(x)$  se anula cuando  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 3$ . Halla el dominio de  $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ .

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 3\}$

10.52 Demuestra que son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) Si dos funciones son pares, su suma también es par.

b) El cociente de dos funciones impares es par.

a)  $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

b)  $\left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

10.53 Juan está estudiando dos ofertas de trabajo como comercial de electrodomésticos, *A* y *B*, que solo se diferencian en el sueldo.

Oferta *A*: 1050 euros mensuales y 10 euros por cada aparato vendido hasta un máximo de 20 al mes.

Oferta *B*: 600 euros al mes y 20 euros por cada electrodoméstico vendido.

- Escribe la fórmula que expresa el sueldo mensual de Juan en cada caso en función del número de electrodomésticos vendidos.
- Calcula el dominio y el recorrido de cada una de las funciones correspondientes.
- ¿Aumentará siempre el sueldo en función del número de aparatos que venda?
- ¿Tienen las funciones algún máximo o mínimo?

a) Oferta *A*:  $f(x) = 1050 + 10x$

Oferta *B*:  $g(x) = 600 + 20x$

b)  $D(f) = [0, 20]$ ;  $R(f) = [1050, 1250]$

$D(g) = [0, +\infty)$ ;  $R(g) = [600, +\infty)$

c) Si  $a < b \leq 20 \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = 10b - 10a > 0 \Rightarrow$  Es creciente.

Si  $a > b > 20$ , la función  $f$  es constante, ya que no recibe más dinero por electrodoméstico vendido.

$a < b \Rightarrow TV[a, b] = g(b) - g(a) = 20b - 20a > 0 \Rightarrow$  Es creciente.

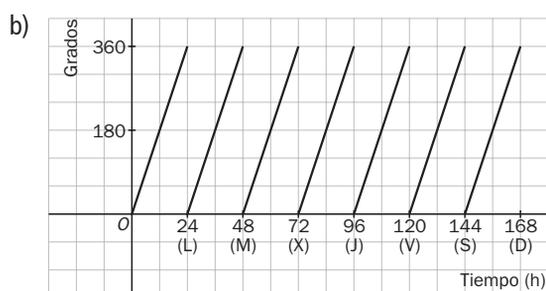
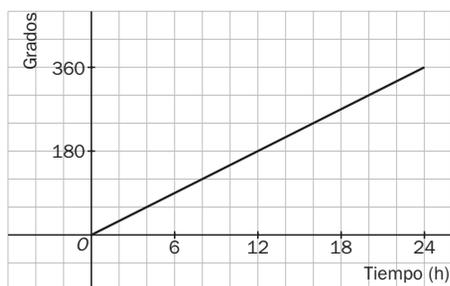
d) La función  $f(x)$  tiene un mínimo absoluto en  $(0, 1050)$  y un máximo absoluto en  $(20, 1250)$ .

La función  $g(x)$  solo tiene un mínimo absoluto en  $(0, 600)$ .

10.54 En su movimiento de rotación, la Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje en un día.

- Representa la gráfica de la función que indica el número de grados que gira en función del tiempo durante un día.
- ¿Cuál sería la gráfica anterior a lo largo de una semana?
- ¿Está acotada la función semanal?
- ¿Es una función periódica? ¿Y simétrica?

a) La velocidad de giro de la Tierra es constante, la gráfica que representa el número de grados en función del tiempo es un recta.



- Sí, una cota superior es  $360^\circ$ .
- La función semanal es periódica, y no simétrica.

- 10.55 Una empresa fabrica DVD y sus costes de producción, en euros, vienen dados por la expresión  $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 25x - 15$ , donde  $x$  es el número de DVD producidos. El precio de venta por unidad es  $P(x) = 75 - \frac{x}{2}$ . ¿Cuál es la función que expresa el beneficio obtenido con la venta de  $x$  DVD?
- $$B(x) = x \cdot P(x) - C(x) = 75x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - 25x + 15 = -x^2 + 50x + 15$$

- 10.56 Cuando dejas caer una pelota desde una altura cualquiera, el espacio que recorre,  $h$ , viene dado por la expresión  $h = 9,8 \cdot t^2$ , siendo  $t$  el tiempo.
- Calcula la fórmula que permite obtener el tiempo transcurrido desde que se lanzó la pelota,  $t$ , en función de la altura a la que se encuentra.

$$t = \sqrt{\frac{h}{9,8}}$$

- 10.57 Un aljibe tiene 750 litros de agua al comienzo del día. Por una fisura pierde 2 litros cada hora. A la vez, está recibiendo agua a razón de 6 litros a la hora.

- a) Estudia el crecimiento de la función que expresa el volumen de agua en el aljibe durante ese día.
- b) ¿A qué hora estará más lleno? ¿Y más vacío? Indica las cantidades de agua almacenadas en esos momentos.

- a)  $y = 750 - 2x + 6x$ ;  $y = 750 + 4x$ ;  $a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = 4b - 4a > 0 \Rightarrow$  Es creciente.
- b) Mínimo en  $(0, 750)$ , y máximo en  $(24, 846)$

- 10.58 Un jardinero quiere vallar un terreno de forma cuadrada y área desconocida en el que ha plantado unas flores. Encuentra la fórmula que permite obtener el lado del cuadrado en función de su área.

- a) Si el área estuviera comprendida entre 120 y 180 metros cuadrados, ¿cuáles serían el dominio y el recorrido de la función?
- b) La función descrita, ¿es creciente o decreciente?
- c) ¿Tiene máximos o mínimos?

El lado en función del área viene dado por  $l = \sqrt{A}$

- a)  $D(f) = [120, 180]$ ;  $R(f) = [\sqrt{120}, \sqrt{180}]$
- b)  $a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow$  Es creciente.
- c) Mínimo  $(120, \sqrt{120})$  y máximo  $(180, \sqrt{180})$

- 10.59 Calcula la fórmula que permite obtener el diámetro de una lata cilíndrica de zumo en función de su altura para que contenga 500 mililitros del mismo.

Si la altura de la lata está comprendida entre 12 y 16 centímetros, ¿cuáles son el dominio y el recorrido de esa función?

Si  $d$  es el diámetro,  $r$  el radio y  $h$  la altura, entonces  $d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{500}{\pi h}}$ .

$D(f) = [12, 16]$        $R(f) = [6, 31; 7, 28]$

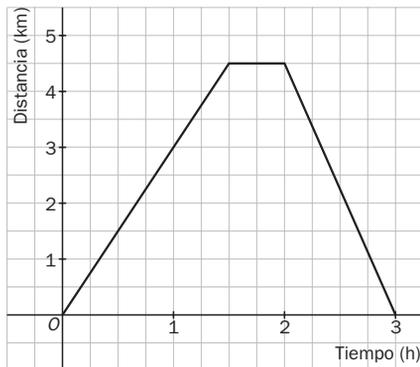
- 10.60 Expresa mediante una función la distancia al lugar de partida a la que se encuentra un grupo de amigos que realiza la siguiente excursión.

- a) Durante la primera hora y media caminan a una velocidad constante de 3 kilómetros por hora.
- b) Descansan durante la media hora siguiente.
- c) Regresan a una velocidad constante de 4,5 km/h.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x < 1,5 \\ 4,5 & 1,5 \leq x < 2 \\ 13,5 - 4,5x & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

10.61 Considera la función del problema anterior.

- Calcula el dominio y el recorrido.
- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Indica sus máximos y mínimos si los tiene.
- Explica si es una función acotada.



- $D(f) = [0, 3]; R(f) = [0, 4,5]$
- Es creciente en  $(0; 1,5)$ . Es decreciente en  $(2, 3)$ .
- No tiene.
- Está acotada superiormente, ya que la distancia al lugar de partida no es mayor de 4,5 km.

### REFUERZO

#### Concepto y características de las funciones

10.62 Halla el dominio de las funciones:

a)  $y = -x^2 - 4$

c)  $y = \frac{3x^3 + 9}{7x^2 + 5x}$

e)  $y = \sqrt{12 - 4x}$

b)  $y = \frac{2x}{4x^2 - 1}$

d)  $y = \sqrt{6x - 18}$

f)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

a)  $D(f) = \mathbf{R}$

c)  $D(f) = \mathbf{R} - \left\{0, \frac{-5}{7}\right\}$

e)  $D(f) = (-\infty, 3]$

b)  $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

d)  $D(f) = [3, +\infty)$

f)  $D(f) = \mathbf{R}$

10.63 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = 4x + x^2$  en los intervalos  $[-2,2; -2]$  y  $[-2; -1,8]$ .

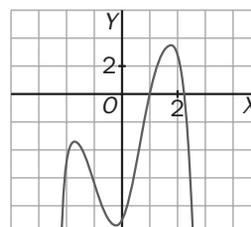
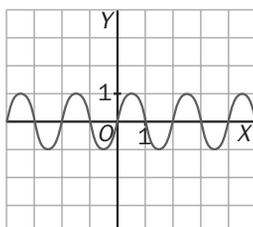
$TV[-2,2; -2] = f(-2) - f(-2,2) = -4 + 3,96 < 0 \Rightarrow$  Es decreciente.

$TV[-2; -1,8] = f(-1,8) - f(-2) = -3,96 + 4 > 0 \Rightarrow$  Es creciente.

10.64 De las siguientes funciones, indica cuáles son periódicas y cuáles están acotadas.

a)  $f(x) = \text{sen}(\pi \cdot x)$

b)  $f(x) = -x^4 + 6x^2 + 2x - 9$



- Es periódica de período  $T = 2$  y está acotada superiormente por 1 e inferiormente por  $-1$ .
- No es periódica. Está acotada superiormente por 4.

10.65 Estudia si las siguientes funciones presentan algún tipo de simetría.

a)  $f(x) = 1 - 2x + x^3$       b)  $g(x) = x^4 + 2x^2 - 4$       c)  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$       d)  $l(x) = 6x^3 - x$

a)  $f(-x) = 1 - 2(-x) + (-x)^3 = 1 + 2x - x^3 \Rightarrow$  No es par ni impar.

b)  $g(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 4 = x^4 + 2x^2 - 4 = f(x) \Rightarrow$  Es par.

c)  $h(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 5} = \frac{1}{x^2 - 5} = h(x) \Rightarrow$  Es par.

d)  $l(-x) = 6(-x)^3 + (-x) = -6x^3 + x = -l(x) \Rightarrow$  Es impar.

### Operaciones con funciones

10.66 A partir de las funciones  $f(x) = 8 - x^2$  y  $g(x) = \frac{1}{2x}$ , calcula las siguientes funciones.

a)  $(g - 2f)(x)$       c)  $(f \cdot g)(x)$       e)  $(f \circ g)(x)$

b)  $(f + 3g)(x)$       d)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$       f)  $(g \circ f)(x)$

a)  $(g - 2f)(x) = \frac{1}{2x} - 16 + 2x^2 = \frac{4x^3 - 32x + 1}{2x}$

b)  $(f + 3g)(x) = 8 - x^2 + \frac{3}{2x} = \frac{16x - 2x^3 + 3}{2x}$

c)  $(f \cdot g)(x) = \frac{8 - x^2}{2x}$

d)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 16x - 2x^3$

e)  $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2x}\right) = 8 - \frac{1}{4x^2}$

f)  $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(8 - x^2) = \frac{1}{16 - 2x^2}$

10.67 Halla la función recíproca de cada una de las siguientes.

a)  $f(x) = 5x + 2$       b)  $g(x) = 2 - x^2$       c)  $h(x) = \sqrt{1 + 3x}$       d)  $l(x) = \frac{7}{4x}$

a)  $y = 5x + 2 \Rightarrow 5x = y - 2 \Rightarrow x = \frac{y - 2}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{5}$

b)  $y = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 - y \Rightarrow x = \sqrt{2 - y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{2 - x}$

c)  $y = \sqrt{1 + 3x} \Rightarrow y^2 = 1 + 3x \Rightarrow 3x = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{3} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$

d)  $y = \frac{7}{4x} \Rightarrow x = \frac{7}{4y} \Rightarrow l^{-1}(x) = \frac{7}{4x}$

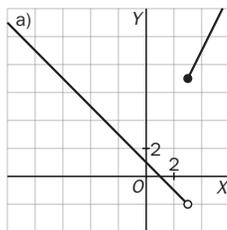
### Funciones definidas a trozos

10.68 Calcula  $f(-3)$ ,  $f(0)$  y  $f(4)$  en la siguiente función.  $f(x) = \begin{cases} 9x - x^2 & \text{si } x < 4 \\ 3x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

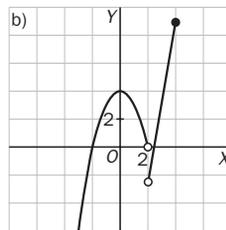
$f(-3) = 9 \cdot (-3) - (-3)^2 = -36$        $f(0) = 0$        $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$

10.69 Dibuja las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



b)  $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 6x - 15 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$



AMPLIACIÓN

10.70 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a)  $y = \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}$

c)  $y = \sqrt{10 + 3x - x^2}$

e)  $y = \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 9}}$

b)  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

d)  $y = \sqrt{(x-2)(x+4)(x-1)}$

f)  $y = \frac{|x-6|}{\sqrt[4]{x^2-1}}$

a)  $\frac{x+4}{x-2} \geq 0$  y  $x-2 \neq 0$ .  $D(f) = (-\infty, -4] \cup (2, +\infty)$

d)  $(x-2)(x+4)(x-1) \geq 0$   $D(f) = [-4, 1] \cup [2, +\infty)$

b)  $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ .  $D(f) = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

e)  $x^2 - 9 \neq 0$ .  $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

c)  $D(f) = [-2, 5]$

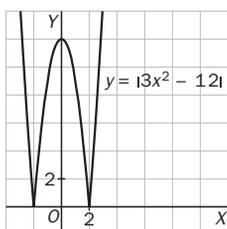
f)  $x^2 - 1 > 0$ .  $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

10.71 Si el dominio de una función  $f(x)$  es  $[3, +\infty)$ , y el de otra,  $g(x)$ , es  $\mathbf{R} - \{-2, -1, 3\}$ , ¿cuál es el dominio de  $(f+g)(x)$ ?

$(3, +\infty)$

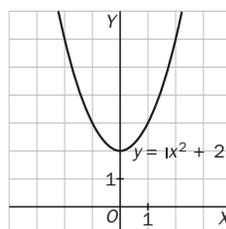
10.72 Dibuja las siguientes funciones e indica si tienen algún máximo o mínimo y de qué tipo es.

a)  $f(x) = |3x^2 - 12|$



- Máximo relativo: (0, 12)
- Mínimos absolutos y relativos: (-2, 0), (2, 0)

b)  $g(x) = |x^2 + 2|$



- Mínimo absoluto y relativo: (0, 2)

10.73 El dominio de la función  $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$  es  $\mathbf{R}$ . Explica si es posible que exista un valor en el que  $f(x)$  sea igual a 0.

No es posible, puesto que en ese caso el dominio de la función sería  $\mathbf{R}$  menos esos valores en los que se anula  $f(x)$ .

10.74 Dadas las funciones  $f(x) = 1 - 5x$ ,  $g(x) = \frac{2x}{x-4}$  y  $h(x) = \sqrt{3x-2}$ , calcula  $(h \circ g \circ f)(x)$ .

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g \circ f)(x) = h\left[\frac{g(f(x))}{f(x)}\right] = h\left[\frac{2(1-5x)}{1-5x-4}\right] = h\left[\frac{2-10x}{-3-5x}\right] = \sqrt{3 \frac{2-10x}{-3-5x} - 2} = \sqrt{\frac{12-20x}{-3-5x}}$$

10.75 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a)  $y = |x^2 - 5x|$       b)  $y = |1 + 4x - x^3|$       c)  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$       d)  $y = \frac{3x^2}{4 + x^4}$

a)  $f(-x) = |(-x)^2 - 5(-x)| = |x^2 + 5x| \neq f(x) \Rightarrow$  No es par ni impar.

b)  $f(-x) = |1 + 4(-x) - (-x)^3| = |1 - 4x + x^3| \neq f(x) \Rightarrow$  No es par ni impar.

c)  $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -f(x) \Rightarrow$  Es impar.

d)  $f(-x) = \frac{3(-x)^2}{4 + (-x)^4} = \frac{3x^2}{4 + x^4} = f(x) \Rightarrow$  Es par.

10.76 Si  $f(x)$  es una función impar y  $g(x)$  es par, ¿qué tipo de simetría tiene la composición  $(g \circ f)(x)$ ?

$(g \circ f)(-x) = g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$ . Es par.

10.77 Calcula la función recíproca de las siguientes.

a)  $f(x) = x^2 - 2x$       b)  $g(x) = |9x - 5|$

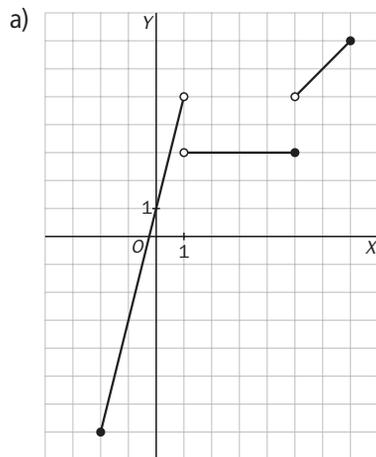
a)  $y = x^2 - 2x \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x}; f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$

b)  $y = |9x - 5| \Rightarrow y = 9x - 5 \Rightarrow 9x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y + 5}{9} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x + 5}{9}$

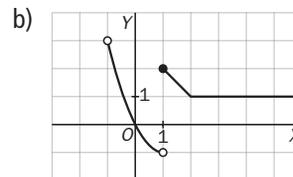
10.78 Representa gráficamente las siguientes funciones e indica si están acotadas.

a)  $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ x & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$

b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



$f(x)$  está acotada superiormente por 7 e inferiormente por -7



$g(x)$  está acotada superiormente por 3 e inferiormente por -1

10.79 Evolución del área

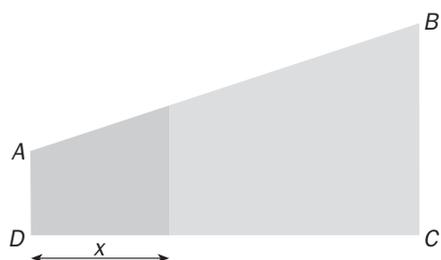
En el trapecio rectángulo  $ABCD$  de la figura adjunta se verifica que:

$AD = 4 \text{ cm}$

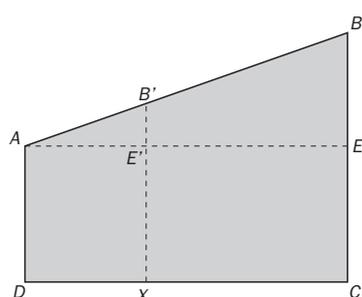
$DC = 14 \text{ cm}$

$BC = 8 \text{ cm}$

Un punto  $x$  se desplaza por el segmento  $DC$  de tal forma que su distancia a  $D$  es  $x$  centímetros.



- a) Escribe, en función de  $x$ , el área de la figura sombreada.
- b) Halla el valor de  $x$  para que las dos zonas en las que queda dividido el trapecio tengan la misma área.



a) Área de la zona sombreada: área  $AEE'$  + área  $A'E'XD$

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{B'E'}{AE'} \Rightarrow \frac{4}{14} = \frac{B'E'}{x} \Rightarrow B'E' = \frac{4x}{14} = \frac{2x}{7}$$

$$\text{Área} = 4x + \frac{x^2}{7}$$

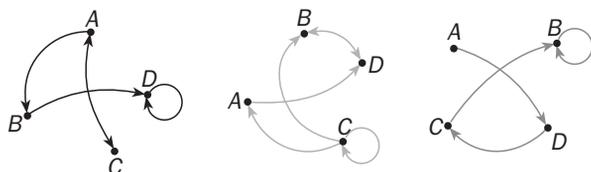
b) Área de la figura =  $\frac{(8 + 4) \cdot 14}{2} = 84$

$$4x + \frac{x^2}{7} = \frac{84}{2} = 42; x^2 + 28x - 294 = 0; x = \frac{-28 \pm 44,26}{2}$$

Consideramos solo la raíz positiva.

10.80 Grafos

Un grafo es una representación de una relación entre los elementos de un mismo conjunto. Observa tres posibles grafos del conjunto  $\{A, B, C, D\}$ .



Un grafo se puede representar mediante una tabla de unos y ceros: un uno indica que el elemento de esa fila está relacionado con el de esa columna, y un cero, que no lo está.

Observa la tabla correspondiente al primer grafo.

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	0	0	1

a) Escribe las tablas asociadas a los otros dos grafos.

b) ¿Cuáles de estos grafos pueden considerarse funciones?

a)	A	B	C	D	A	B	C	D
A	0	0	0	1	A	0	0	0
B	0	0	0	1	B	0	1	0
C	1	1	1	0	C	0	1	0
D	0	1	0	0	D	0	0	1

b) El tercero

**AUTOEVALUACIÓN**

**10.A1** Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a)  $y = x^2 + 4x - 5$       b)  $y = x^3 + 2x - 3$       c)  $y = \sqrt{3x^2 + 4}$       d)  $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

a)  $D(f) = \mathbf{R}$ ;  $R(f) = [-9, +\infty)$

c)  $D(f) = \mathbf{R}$ ;  $R(f) = [2, +\infty)$

b)  $D(f) = \mathbf{R}$ ;  $R(f) = \mathbf{R}$

d)  $D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ ;  $R(f) = \mathbf{R}^+$

**10.A2** Estudia el crecimiento y decrecimiento de las funciones en los intervalos que se indican. Ten presente cómo es la gráfica de cada una.

a)  $f(x) = 5 - 6x$  en  $[0,5; 1]$

b)  $g(x) = x + x^2$  en  $[-1,5; -1]$  y en  $[0,2; 1]$

a)  $TV[0,5; 1] = f(1) - f(0,5) = -1 - 2 = -3 < 0 \Rightarrow$  Es decreciente.

b)  $TV[-1; -1,5] = f(-1) - f(-1,5) = 0 - 1,05 < 0 \Rightarrow$  Es decreciente.

$TV[-1; 0,2] = f(0,2) - f(-1) = 0,24 - 0 > 0 \Rightarrow$  Es creciente.

**10.A3** Realiza las siguientes operaciones con las funciones  $f(x) = 4x - 2x^2$  y  $g(x) = 3 - x - x^2$ .

a)  $(5f - 2g)(x)$       b)  $\left(\frac{3g}{f}\right)(x)$       c)  $(f \cdot g)(x)$       d)  $(f + 4g)(x)$

a)  $(5f - 2g)(x) = 20x - 10x^2 - 6 + 2x + 2x^2 = -8x^2 + 22x - 6$

b)  $(f \cdot g)(x) = 12x - 4x^2 - 4x^3 - 6x^2 + 2x^3 + 2x^4 = 2x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 12x$

c)  $\left(\frac{3g}{f}\right)(x) = \frac{9 - 3x - 3x^2}{4x - 2x^2}$

d)  $(f + 4g)(x) = 4x - 2x^2 + 12 - 4x - 4x^2 = -6x^2 + 12$

**10.A4** Calcula la función recíproca de cada una de las siguientes.

a)  $f(x) = 7x - 1$       b)  $g(x) = \frac{2}{1-x}$       c)  $h(x) = \sqrt{6x+9}$       d)  $j(x) = x^2 + 9$

a)  $y = 7x - 1 \Rightarrow 7x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{7}$

b)  $y = \frac{2}{1-x} \Rightarrow (1-x)y = 2 \Rightarrow y - xy = 2 \Rightarrow -xy = 2 - y \Rightarrow x = \frac{y-2}{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-2}{x}$

c)  $y = \sqrt{6x+9} \Rightarrow y^2 = 6x+9 \Rightarrow 6x = y^2 - 9 \Rightarrow x = \frac{y^2-9}{6} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x^2-9}{6}$

d)  $y = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = y - 9 \Rightarrow x = \sqrt{y-9} \Rightarrow j^{-1}(x) = \sqrt{x-9}$

**10.A5** Para las funciones del ejercicio anterior, calcula:

a)  $(f \circ g)(x)$

b)  $(g \circ h)(x)$

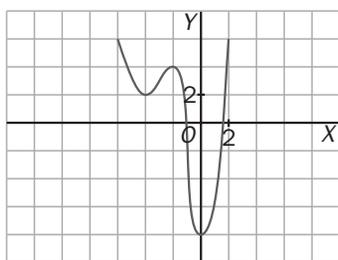
c)  $(g \circ f)(0)$

a)  $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{2}{1-x}\right) = 7 \cdot \frac{2}{1-x} - 1 = \frac{14-1+x}{1-x} = \frac{13+x}{1-x}$

b)  $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{6x+9}) = \frac{2}{1-\sqrt{6x+9}}$

c)  $(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(-1) = \frac{2}{1-(-1)} = 1$

10.A6 Observa la gráfica de la función  $f$ .

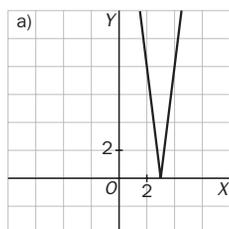


- Encuentra el dominio y el recorrido.
- Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Halla sus máximos y mínimos e indica de qué tipo son.
- ¿Qué tipo de acotación tiene?

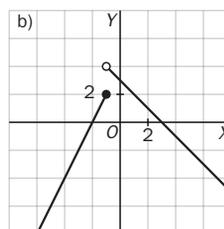
- $D(f) = \mathbf{R}; R(f) = [-8, +\infty)$
- Es creciente en  $(-4, -2) \cup (0, +\infty)$ . Es decreciente en  $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$ .
- La función tiene mínimos relativos en  $(-4, 2)$  y  $(0, -8)$ ; un mínimo absoluto en  $(0, -8)$ , y un máximo relativo en  $(-2, 4)$ .
- Está acotada inferiormente.

10.A7 Dibuja las siguientes funciones.

a)  $f(x) = |24 - 8x|$



b)  $g(x) = \begin{cases} 4 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ 3 - x & \text{si } x > -1 \end{cases}$



10.A8 Estudia si son simétricas y, en su caso, de qué tipo son las siguientes funciones.

a)  $f(x) = 5x^3 + 4x$

b)  $g(x) = \frac{x^4}{1 - x^2}$

a)  $f(-x) = 5(-x)^3 + 4(-x) = -5x^3 - 4x = -f(x)$ . La función es impar.

b)  $g(-x) = \frac{(-x)^4}{1 - (-x)^2} = \frac{x^4}{1 - x^2} = g(x)$ . La función es par.

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

Nombres y apellidos

El apellido representa la familia a la que perteneces y el nombre te identifica entre sus componentes. Juan Pérez, Jordi Castellet, Carmen Martínez, Pavel Iovanescu y Amal Kasar son algunos alumnos de una clase de 4.º de ESO. Si relacionamos el nombre de cada uno con su apellido, ¿esta relación es una función? Si cada alumno tuviera dos nombres, ¿la relación seguiría siendo una función? ¿Y si utilizaran los dos apellidos?

Si relacionamos el nombre de cada persona con su apellido, tendremos una relación biunívoca en la que a todo nombre (elemento del primer conjunto) le corresponda un apellido (imagen del segundo conjunto) y solo uno. Luego la relación es una función.

Si se tienen dos nombres, también será una función, ya que cada nombre tiene imagen y una sola.

Si se utilizan los dos apellidos, dejará de ser función, ya que a cada nombre le corresponderán dos apellidos (imágenes).