Matemáticas
de
2º de Bachillerato

Teoremas con funciones derivables
(Estudio de funciones)

Por Javier Carroquino CaZas
Catedrático de matemáticas
del
I.E.S. Siete Colinas

Ceuta 2006

Teoremas con funciones derivables
(estudio de funciones)

Javier Carroquino Cañas

Matemáticas de 2º de bachillerato

– • –

Ciencias de la Naturaleza y la Salud

Tecnología

TEOREMAS CON FUNCIONES DERIVABLES

(estudio de funciones)

Por

Javier Carroquino Cañas

Catedrático de matemáticas

I.E.S. Siete Colinas (Ceuta)

Departamento de Matemáticas

Ceuta 2006

I.E.S. Siete Colinas (Departamento de Matemáticas)
Teoremas con funciones derivables (estudio de funciones)

Depósito Legal : CE & 127 / 06

ISBN : 84 & 690 & 2657 & 7

Número de Registro :

Ceuta 2006

Prólogo

Se completa el estudio de las *funciones reales de variable real* con la inclusión de algunos teoremas válidos para funciones continuas y derivables en ú o en un intervalo de ú que nos permitirán un conocimiento más exhaustivo de aquellas que verifiquen sus hipótesis, logrando así concluir el bloque temático correspondiente, en este nivel, a las *funciones de una variable real*.

Es de especial interés la posibilidad de encontrar algunos límites de funciones en un punto ***a*** o en el infinito que no podían hallarse con los conocimientos adquiridos en el tema visto con anterioridad "***Límites de funciones***", perteneciente a esta colección, gracias a la inclusión del teorema o regla de L´Hôpital, lo que completa el estudio de las asíntotas de una función.

Consideramos adecuado que el estudio de este tema sea a continuación de "***Aplicaciones de las derivadas*** **(*estudio de funciones*)**" así como informar de que su nivel corresponde a 2º de bachillerato en las modalidades de "*Ciencias de la Naturaleza y Salud"* y "*Científica Tecnológica*", además de aquellos estudios universitarios con contenidos matemáticos en el primer curso.

Índice

Página

Teoremas con funciones derivables (estudio de funciones)

1.Introducción.-

Antes de comenzar el estudio de este tema convine que el alumno domine los conceptos de derivada, límite y continuidad de funciones, así como las técnicas para hallar derivadas, límites y decidir sobre la continuidad de una función en un punto o en un intervalo.

Resulta útil para afianzar conceptos el manejo de la calculadora así como el de algún software sobre funciones matemáticas que permita la representación gráfica.

2.Teorema sobre la imagen de una función continua.-

Si *f* es una función continua definida en un intervalo cerrado [*a*,*b*], entonces el conjunto imagen (o recorrido) de *f* es un punto o un intervalo cerrado.

Matemáticamente:

$$f:[a,b] \to \mathrm{R} \ \ continua \ \Rightarrow \begin{cases} o\ bien\ \ f([a,b]) = y_0 \in \mathrm{R} \\ o\ bien\ \ f([a,b]) = [y_1, y_2] \end{cases}$$

Recuerda:

f ([*a,b*]) es el conjunto imagen de la función f correspondiente al intervalo [*a,b*], es decir, el conjunto en el que "se refleja" [*a,b*] mediante *f*. Gráficamente el conjunto [*a,b*] estaría en el eje de abcisas, mientras que *f* ([*a,b*]) está en el de ordenadas.

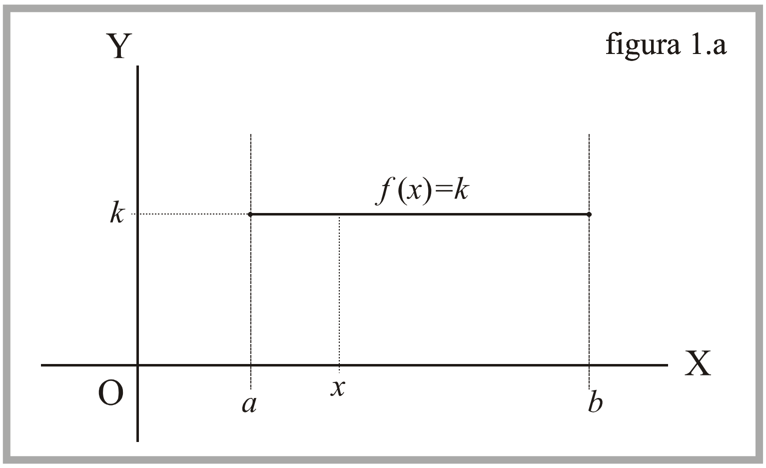
La forma matemática de definir *f* ([*a,b*]) es:

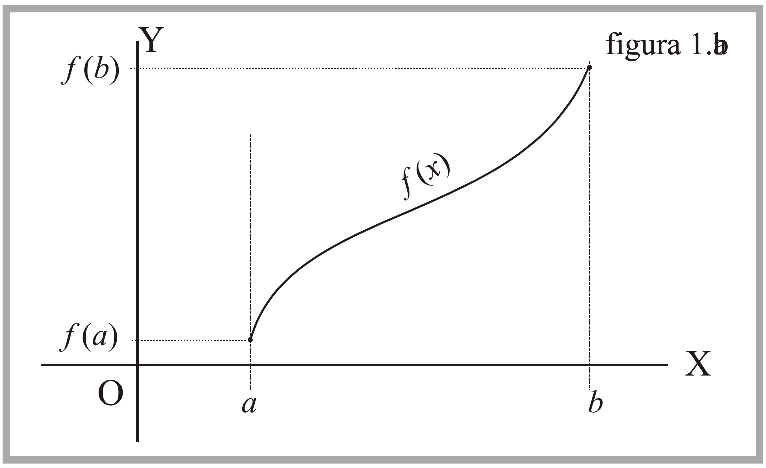
$$f([a,b]) = Conjunto\ de\ todos\ los\ números\ de\ \mathrm{R}\ que\ son\ imagen\ de\ \text{algún}\ elemento\ de\ [a,b]$$

$$f([a,b]) = \{\, y \in \mathrm{R} \mid \exists\, x \in [a,b]\ que\ verifica\ \ f(x) = y \,\} \subset \mathrm{R}$$

No demostraremos este teorema (que es bastante intuitivo), pero si lo interpretaremos de un modo gráfico.

figura 1





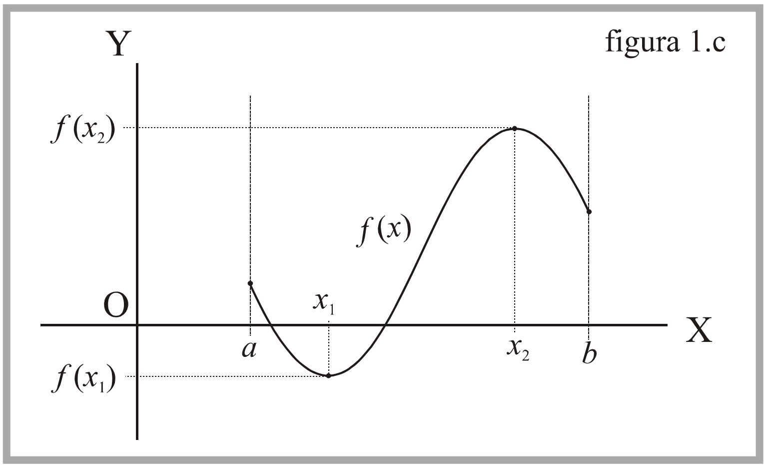


figura 1.a
En este caso la función continua $f(x)$ es constante en el intervalo cerrado $[a,b]$, es decir, $f(x)$=k para todo x0$[a,b]$.
El conjunto imagen $f([a,b])$ es un conjunto formado por un solo punto, es decir:
$f([a,b])$ =
= {y0ú * ›x0$[a,b]$ que $f(x)=y$}
= { k }dú

figura 1.b
En este caso el conjunto imagen de la función continua f es $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, es decir un intervalo en el cual el extremo inferior es la imagen de a y el extremo superior es la imagen de b. Nótese que esto ocurre porque la función es ***estrictamente creciente*** en $[a,b]$. En el caso en que f fuese estrictamente decreciente sería $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

figura 1.c
Ahora f es una función continua en $[a,b]$ con un mínimo absoluto en x_1 y un máximo absoluto en x_2 por lo que el conjunto imagen es:
$f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)] = [y_1, y_2]$

siendo:
$y_1 = f(x_1)$ con $a < x_1 < b$
$y_2 = f(x_2)$ con $a < x_2 < b$

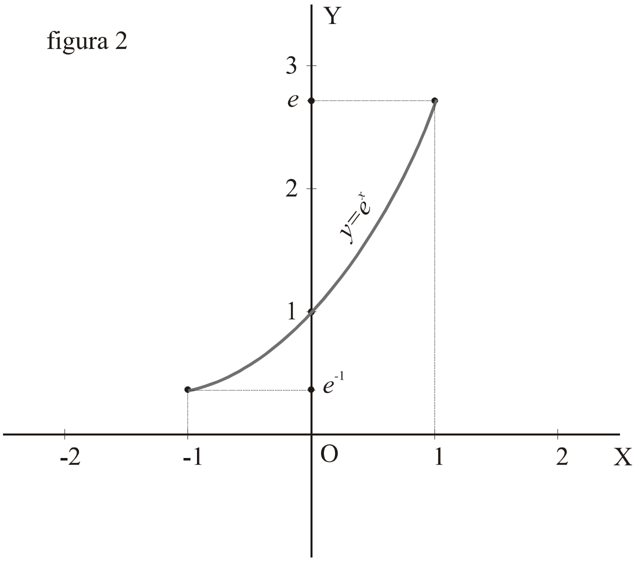
Ejemplo 1.-

Sea la función definida de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} f:[-1,1] \to \mathbb{R} \\ \quad x \;\to\; f(x) = e^x \end{array}\right\}$$

¿Podemos asegurar que su conjunto imagen es un punto o un intervalo cerrado? Veamos:

figura 2



La función $f(x) = e^x$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$. En este caso la función está definida en el intervalo cerrado $[-1,1]$, por lo que podemos asegurar que es continua en dicho intervalo. Aplicando el teorema anterior, aseguramos que "*el conjunto imagen de f es un punto o un intervalo cerrado*"

Además, debemos reconocer a simple vista que $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo será en el intervalo $[-1,1]$. Esto nos permite asegurar que el conjunto imagen de f, restringido al intervalo $[-1,1]$ es el intervalo cerrado $[f(-1), f(1)]$, es decir:

$$f\left([-1,1]\right) = \left\{ y \in \mathrm{R} \;\middle|\; \exists x \in [-1,1] \text{ } que \text{ } verifica \text{ } f(x) = e^x = y \right\} \underbrace{=}_{\substack{por\ ser\ estric\\ creciente}} \left[f(-1), f(1)\right] =$$

$$= \left[e^{-1}, e\right] = \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

La *figur*a 2 nos muestra una representación ***aproximada*** de $f(x) = e^x$ restringida a $[-1,1]$, en la que hemos marcado el intervalo imagen (o recorrido) $[e^{-1}, e]$ en el eje de ordenadas.

Ejercicio 1.-

El departamento de contabilidad y costes de una empresa productora de aceite ha obtenido la función que relaciona la cantidad $\boldsymbol{x}$ de aceite producido (en m^3) al año con los beneficios o pérdidas en miles de euros (variable $\boldsymbol{y}$), siendo dicha función la siguiente:

$$y = f(x) = -10 - \frac{823}{210}x + \frac{241}{700}x^2 - \frac{11}{2100}x^3$$

Se sabe, además, que la capacidad de producción de esa empresa es, como máximo, de 52 m^3 anuales.

Queremos saber los siguiente:

a) ¿Cual es el campo de existencia (o de definición) de esa función?

b) ¿Qué beneficio esperamos obtener si la producción fuese de 10 m^3 ?

c) ¿Qué beneficio esperamos obtener si la producción fuese de 35 m^3 ?

d) ¿Qué beneficio esperamos obtener si la producción fuese la máxima posible?

e) ¿Cuál es el margen de variación del beneficio o pérdida que tiene la empresa en un año?

Solución:

a) Del contexto del problema deducimos que la producción posible de aceite oscila entre un mínimo de 0 m^3 y un máximo de 52 m^3. Desde un punto de vista matemático se expresa diciendo que la variable x toma valores dentro del intervalo $[0,52]$, es decir, el campo de definición o de existencia de la función $y = f(x)$ es el intervalo $[0,52]$.

La forma de expresar matemática la relación funcional entre las variables *x* (producción) e ***y*** (beneficio) es:

$$\left.\begin{array}{r}[0,52] \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{R} \\ x \to \ y = f(x)\end{array}\right\} con \left\{\begin{array}{l} x = m^3 \ de\ aceite \\ y = beneficio\ en\ miles\, de\ euros\end{array}\right.$$

Desde el punto de vista gráfico, el intervalo de definición de *f* está representado en el eje de abcisas.

b) Se trata de hallar la imagen de $x = 10 \in [0,52]$

$$x = 10 \ \to \ y = f(10) = -10 - \frac{823}{210}\cdot 10 + \frac{241}{700}\cdot 10^2 - \frac{11}{2100}\cdot 10^3 =$$
$$= -10 - \frac{823}{21} + \frac{241}{7} - \frac{110}{21} = \frac{-210 - 823 + 723 - 110}{21} = -\frac{420}{21} = -20$$

Interpretamos que habría un beneficio de &20.000 €, es decir, una pérdida.

c) Se trata de hallar la imagen de $x = 35 \in [0,52]$

$$x = 35 \ \to \ y = f(35) = -10 - \frac{823}{210}\cdot 35 + \frac{241}{700}\cdot 35^2 - \frac{11}{2100}\cdot 35^3 =$$
$$= -10 - \frac{823}{6} + \frac{1687}{4} - \frac{2695}{12} = \frac{-120 - 1646 + 5061 - 2695}{12} = \frac{600}{12} = 50$$

Interpretamos que habría un beneficio de 50.000 €.

d) Como la capacidad máxima de producción es de 52 m^3 , se trata de hallar la imagen de $x = 52 \in [0,52]$

$$x = 52 \ \to \ y = f(52) = -10 - \frac{823}{210}\cdot 52 + \frac{241}{700}\cdot 52^2 - \frac{11}{2100}\cdot 52^3 =$$
$$= trabajando\ con\ decimales = -19'36$$

Interpretamos que si producimos al máximo se obtendría una pérdida de 19.360 €

e) Desde un punto de vista práctico y real, nos piden determinar los valores mínimo (pérdida si es negativo) y máximo (beneficio si es positivo) en el que está comprendida la variable dependiente ***y***. Como la función $y = f(x)$ es polinómica, podemos asegurar que es continua en su campo de existencia [0,52], lo cual no indica que entre esos valores mínimo y máximo, la variable y puede tomar cualquier valor intermedio.
Matemáticamente, aplicando el teorema anterior, no piden que hallemos el conjunto imagen de la función continua $y = f(x)$, restringido al intervalo cerrado [0,52]:

$$f\left([0,52]\right) = Conjunto\ de\ todos\ los\ números\ de\ \mathrm{R}\ que\ son\ imagen\ de\ \text{algún}\ elemento\ de\ [0,52]$$
$$f\left([0,52]\right) = \left\{ y \in \mathrm{R} \mid \exists\, x \in [0,52]\ que\ verifica\ \ f(x) = y \right\} \subset \mathrm{R}$$

Como en este caso no podemos asegurar que los extremos (máximo y mínimo) de $f(x)$ se obtengan en los valores $x = 0$ y $x = 52$, debemos hallar esos extremos utilizando las derivadas.
Veamos:

Hallamos la primera derivada de *f*: $f'(x) = -\frac{823}{210} + \frac{241}{350}x - \frac{11}{700}x^2$

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$-\frac{823}{210}+\frac{241}{350}x-\frac{11}{700}x^2=0 \qquad m.c.m(210,350,700)=2100$$

$$-33x^2+1446x-8230=0$$

$$33x^2-1446x+8230=0$$

$$x=\frac{1446\pm\sqrt{2090916-1086360}}{66}\approx\frac{1446\pm 1002'275411}{66}\approx\begin{cases}x_1\approx 37'0951\\ x_2\approx 6'7231\end{cases}$$

En los puntos (aproximados) $\begin{cases}x_1=37'0951\in[0,52]\\ x_2=6'7231\in[0,52]\end{cases}$ *posibles extremos.*

Nótese que los valores no son exactos, es decir, están aproximados a cuatro decimales.

Hallemos la segunda derivada de f: $f''(x)=\frac{241}{350}-\frac{11}{350}x$

Calculemos los valores de $f''(x)$ para x_1 y x_2 :

$$\left.\begin{array}{l}x_1=37'0951\rightarrow f''(37'0951)=-0'4772...<0\\ x_2=6'7231\rightarrow f''(6'7231)=0'4772...>0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}*\ \textit{En } x_1 \textit{ hay máximo}\\ *\ \textit{En } x_2 \textit{ hay mínimo}\end{cases}$$

Interpretamos lo siguiente:

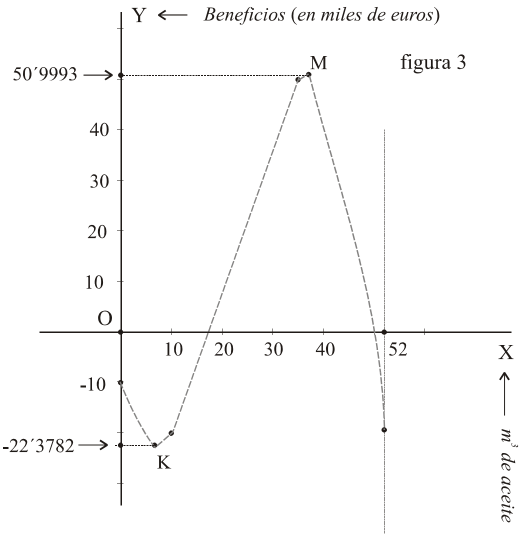
Para una producción (aproximada) de 6´7231 m^3 (6723´1 litros) obtenemos el mínimo beneficio posible (podemos sospechar que habrá pérdidas).

Para una producción (aproximada) de 37´0951 m^3 (37095´1 litros) obtenemos el máximo beneficio posible (podemos sospechar que habrá ganancias)

Ahora calculemos los puntos mínimo y máximo de la curva $y=f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}x_2=6'7231\rightarrow f(6'7231)\approx-22'3782\\ x_1=37'0951\rightarrow f(37'0951)\approx 50'9993\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\textit{Punto mínimo } K(6'7231,-22'3782)\\ \textit{Punto máximo } M(37'0951,50'9993)\end{cases}$$

Quede claro que los punto K y M son aproximados.



La *figura* 3 nos muestra un esquema de los resultados obtenidos (no se trata de la representación de la función). Apréciese la imagen $[y_2,y_1]=[f(x_2),f(x_1)]$

Interpretamos los resultados obtenidos del siguiente modo:

Para una producción aproximada de 6´7231 m^3 de aceite al año, obtenemos el mínimo beneficio posible, una pérdida de 22.378´2 € aproximadamente.

Para una producción aproximada de 37´0951 m^3 de aceite al año, obtenemos el máximo beneficio posible, una ganancia de 50.999´3 € aproximadamente.

En definitiva, el recorrido o imagen de la función $y=f(x)$ restringida al intervalo [0 , 52] es $f([0,52])=[-22'3782, 50'9993]$ aproximadamente.

3.Teorema de Rolle.-

Este sencillo teorema aplicable a funciones continuas y derivables que en un intervalo cerrado las imágenes de los extremos sean iguales, dice lo siguiente:

> Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un punto x_0 del intervalo (a,b) tal que el valor de la derivada de $f(x)$ en x_0 es cero.

En forma matemática:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{funciòn continua en } [a,b] \\ f(x)\ \text{funciòn derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0)=0$$

Demostración:

Para la demostración de este teorema necesitaremos aplicar el teorema de **Weierstrass** (ver ***Continuidad de funciones*** , página 36, de esta colección).

$f(x)$ *continua* $[a,b] \Rightarrow$ *Por el teorema de Weierstrass, existe un punto* $\alpha \in [a,b]$ *y otro punto* $\beta \in [a,b]$ *en los cuales la función* $f(x)$ *alcanza un* mìnimo k *y un* màximo m *respectivamente* (*es decir* $f(\alpha)=k$ *y* $f(\beta)=m$).

Vamos a distinguir dos casos:

Caso 1º

$k=m$. Es decir, los valores mínimo $f(\alpha)=k$ y máximo $f(\beta)=m$ son iguales.

$$\left.\begin{array}{l} k = \text{mìnimo de } f \text{ en } [a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] \text{ es } f(x) \geq k \\ m = \text{màximo de } f \text{ en } [a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] \text{ es } f(x) \leq m \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\forall x \in [a,b] \text{ se verifica que } k \leq f(x) \leq m \underbrace{\Rightarrow}_{por\ ser\ k=m} \forall x \in [a,b] \text{ es } k = f(x) = m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = k = m \text{ es una funciòn constante en } [a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] \text{ es } f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{existen (en este caso) infinitos puntos } x_0 \text{ del intervalo } (a,b) \text{ tales que } f'(x_0)=0$$

Caso 2º

$k...m$. Evidentemente, en este caso k o m será distinto de $f(a)=f(b)$.

Supongamos que es $k \neq f(a) = f(b)$.

f *es continua en* $[a,b] \Rightarrow$ *Por el teorema de Weierstrass,* $\exists x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) = k$,

siendo $x_0 \neq a$ *y* $x_0 \neq b$ *por ser* $f(x_0) = k \neq f(a) = f(b) \Rightarrow a < x_0 < b \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \exists x_0 \in (a,b)\ \big|\ f(x_0) = k = \text{mínimo} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *La funciòn f tiene un* mínimo *relativo en* $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *Como f es derivanble en (a,b), debe ser* $f'(x_0) = 0$

Supongamos ahora que es $m \neq f(a) = f(b)$.

f *es continua en* $[a,b] \Rightarrow$ *Por el teorema de Weierstrass,* $\exists x_0 \in [a,b]\ \big|\ f(x_0) = m,$

siendo $x_0 \neq a$ *y* $x_0 \neq b$ *por ser* $f(x_0) = m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow a < x_0 < b \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \exists x_0 \in (a,b)\ \big|\ f(x_0) = m = \text{màximo} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *La funciòn tiene un* màximo *relativo en* $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *Como f es derivable en (a,b), debe ser* $f'(x_0) = 0$

Veamos ahora la interpretación gráfica de este teorema mediante el dibujo de unas supuestas funciones que verifican las hipótesis. Quede claro que la ocurrencia de las hipótesis garantiza el cumplimiento de la tesis, pero puede ocurrir que una función no cumpla las condiciones del teorema de Rolle y, sin embargo, su derivada en un punto x_0 sea cero.

figura 4

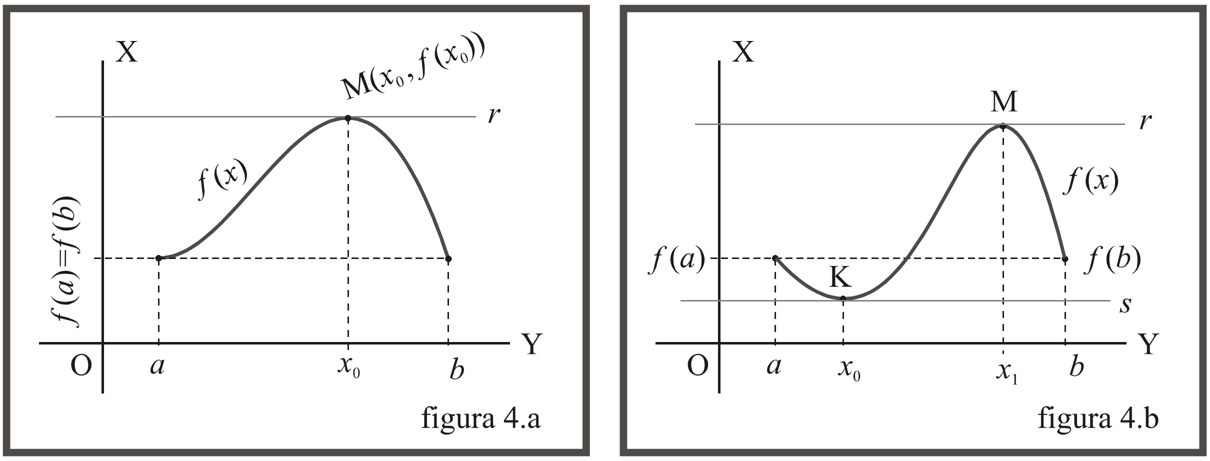


figura 4.a
En esta figura hemos representado una supuesta función $f(x)$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) (debe apreciarse a simple vista) y con $f(a) = f(b)$.
Se observa que en el punto $M(x_0, f(x_0))$ la recta ***r*** tangente a la gráfica tiene pendiente cero, es decir, $f'(x_0) = 0$ con $x_0 0 (a,b)$.
Obsérvese que únicamente hay un punto de (a,b) en el cual se anula la derivada de f, siendo ese punto un máximo relativo.

figura 4.b
En este caso la función $f(x)$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y con $f(a) = f(b)$, pero existen dos puntos, x_0 y x_1, en los que se anulan las primeras derivadas, es decir, $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$.
Se observa que en el punto $K(x_0, f(x_0))$ la función tiene un mínimo y en $M(x_1, f(x_1))$ un máximo.
Las rectas ***r*** y ***s*** tangentes en los puntos K y M tienen pendientes cero.

figura 5

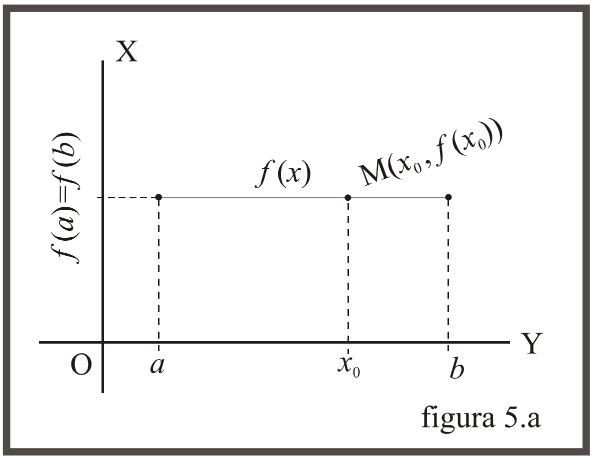


figura 5.a

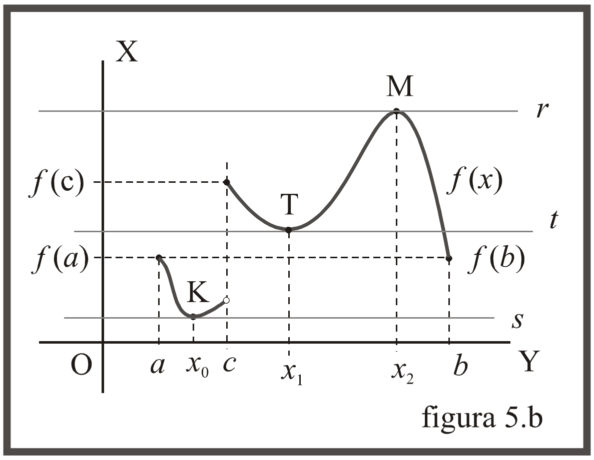


figura 5.b

figura 5.a

En este caso la función $f(x)$ es constante en el intervalo $[a,b]$, por lo que cumple las hipótesis $f(x)$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$.

Por ser una función constante, se verifica que œx0(a,b) es $f'(x) = 0$, esto es, existen infinitos puntos del intervalo abierto (a,b) en los que la derivada es cero.

figura 5.b

Nos muestra una función $f(x)$ que no cumple dos de las hipótesis del teorema de Rolle, a saber, no es continua en el intervalo $[a,b]$, por ser discontinua en c0$[a,b]$ y no es derivable en (a,b), por no serlo en c0(a,b).

No obstante se puede apreciar que existen tres puntos x_0, x_1, x_2 0(a,b) en los cuales es $f'(x_0) = f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

La *figura* 6 nos muestra la gráfica de una supuesta función $f(x)$ que es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, verifica la igualdad $f(a) = f(b)$, pero no es derivable en el intervalo abierto (a,b) por no serlo en los puntos $x_0, x_1$0(a,b).

Nótese que en x_0 y x_1 la función alcanza un mínimo y un máximo, sin embargo no se verifica que $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$ al no existir las derivadas $f'(x_0)$ y $f'(x_1)$.

Se trata del caso de una función que no cumple las hipótesis del teorema de Rolle y tampoco la tesis.

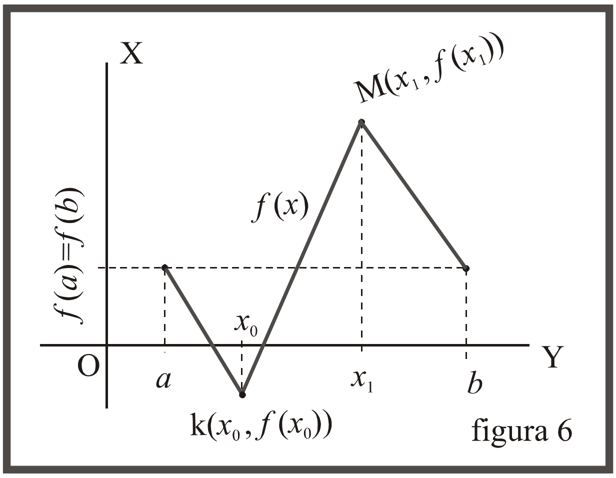


figura 6

Ejemplo 2.-

Sea la función definida del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} [1,3] \xrightarrow{f} R \\ x \;\rightarrow\; f(x) = x^2 - 4x + 1 \end{array}\right\}$$

Queremos saber si verifica las hipótesis del teorema de Rolle y, en caso afirmativo, hallar los puntos del intervalo (1,3) en los que se anula la derivada.

Veamos:

3 Comprobemos si verifica las hipótesis del teorema de Rolle:

4 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ Es una función polinómica de grado 2, por lo que es continua en todo ú y, en consecuencia, lo es en el intervalo cerrado [1,3].

4 Las funciones polinómicas son derivables, por lo que podemos asegurar que existe $f'(x)$ en (1,3). En concreto es $f'(x) = 2x$ & 4 œx0(1,3)

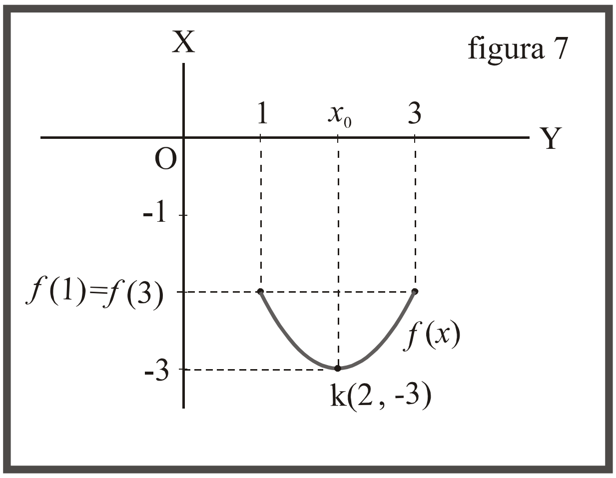
4 $f(1) = 1^2$ & 4·1 + 1 = &2 $f(3) = 3^2$ & 4·3 + 1 = &2

$f(1) =$ $f(3) =$ &2

Por tanto, la función dada verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

3 Podemos asegurar la existencia de un punto (al menos) $x_0$0(1,2) tal que $f'(x_0) = 0$
Al observar la función f, nos percatamos de que se trata de una parábola, es decir, el punto x_0 debe se único y coincide con la abcisa de vértice.

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \in (1,3)$$



Hemos comprobado el teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo cerrado [1,3]

En la *figura* 7 hemos representado la gráfica de la función $f(x)$. Nótese que se trata de un trozo de parábola cuyo vértice es el punto mínimo K(2,&3).

Puede apreciarse que la pendiente de la curva en el punto K es $f'(2) = 0$, esto es, el punto buscado que verifica el teorema de Rolle es $x_0 = 2$.

Ejercicio 2.-

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21$, averiguar si cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [&1,7] y, en caso afirmativo, hallar los puntos de dicho intervalo en los cuales se anula la primera derivada.

Solución:

± $f(x)$ es una función polinómica y, por tanto, es continua en todo ú. Como está definida en el intervalo cerrado [&1,7], podemos asegurar que es continua en dicho intervalo.

± La derivada de la función f es $f'(x) = 3x^2$&18x + 11.Puede apreciarse que existe para cualquier valor de x, por lo que podemos decir que la función f es derivable en (&1,7).

± f(&1) = (&1)^3&9·(&1)^2 + 11·(&1) + 21 = &1 & 9 & 11 + 21 = 0
$f(7) = 7^3$&9·7^2 + 11·7 + 21 = 343 & 441 + 77 + 21 = 0

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \textit{ continua en } [-1,7] \\ f(x) \textit{ derivable en } (-1,7) \\ f(-1) = f(7) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \alpha \in (-1,7) \mid f'(\alpha) = 0$$

Es decir, la función dada, $f(x)$, verifica el teorema de Rolle en el intervalo cerrado [&1,7]

º Busquemos el punto (o puntos) α :

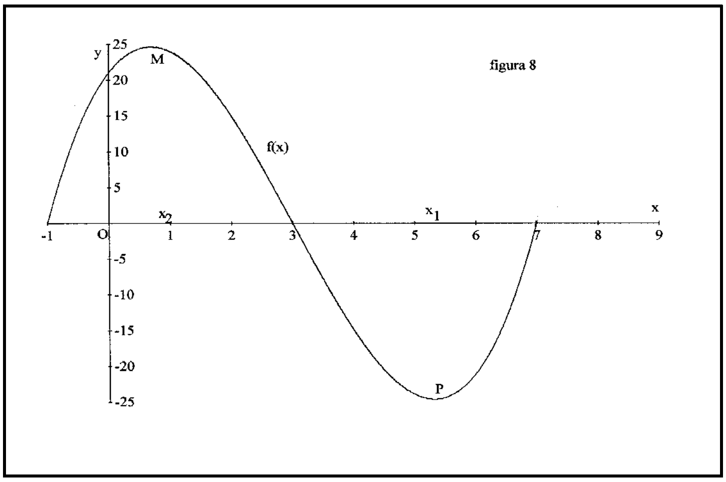
$f'(x) = 0$

$$3x^2 - 18x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 132}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{192}}{6} = \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = 3 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

º Obsérvese que:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 3 + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 5'30940107.... \in (-1,7) \\ x_2 = 3 - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0'69059892.... \in (-1,7) \end{array} \right\}$$

Existen dos puntos en el intervalo abierto (&1,7) en los cuales se anula la primera derivada de *f*.



En la *figura* 8 hemos representado la gráfica de la función $f(x)$ y podemos apreciar como para x_1 se produce un mínimo relativo (punto P), mientras que para x_2 se produce un máximo (punto M). Para comprobarlo basta con hallar la segunda derivada $f''(x)$ = 6*x* & 18 y ver su signo para cada uno de los valores x_1 y x_2 :

$f''(x_1)$= 6 x_1 & 18 > 0

$f''(x_2)$= 6 x_2 & 18 < 0

Nótese que f(&1) = f(7) = 0

Ejercicio 3.-

Considera la función de ecuación $f(x) = 3 - x$ y considera el conjunto **L** de los puntos de su gráfica comprendidos entre A(α, 0) y B(0,β), siendo A y B los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes. Considera las distancias entre el origen O(0,0) y los puntos de **L**.

Se pide:

- **a)** Representa gráficamente el conjunto L
- **b)** Elige dos puntos cualesquiera de **L** (distintos de A y B) y halla sus distancias al punto O(0,0)
- **c)** Define la función de una variable *x* (llámala *d* (*x*)) que relaciona la abcisa *x* de cualquier punto P(*x,y*)0**L** con la distancia de P a O.
- **d)** Verifica la función obtenida en **c)** con los resultados del apartado **b)**
- **e)** Comprueba que la función *d* (*x*) verifica el teorema de Rolle en el intervalo [0,3].
- **f)** Halla el valor *t*0(0,3) que verifica la igualdad *d'*(*t*) = 0 e interpreta el resultado.
- **g)** Haz una interpretación gráfica del resultado obtenido en el apartado anterior.

Solución:

a) Puede apreciarse que $f(x) = 3 - x$ es una función polinómica de grado 1, por lo que su gráfica es una recta decreciente por ser su pendiente *m* = &1.

Dibujemos su gráfica para posteriormente determinar el conjunto **L**.

Como se trata de una recta, es suficiente con determinar dos puntos. Decidimos hallar los puntos A(α, 0) y B(0,β) de corte con los ejes.

3

$$\left.\begin{array}{r} A(\alpha, f(\alpha)) \;\; con \;\; f(\alpha) = 0 \\ 3 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 3 \end{array}\right\} \text{Por tanto } A(3,0) \;\; corte \; con \; OX$$

$$\left.\begin{array}{r} B(0,\beta) \;\; con \;\; f(0) = \beta \\ 3 - 0 = \beta \Rightarrow \beta = 3 \end{array}\right\} \text{Por tanto } B(0,3) \;\; corte \; con \; OY$$

figura 9

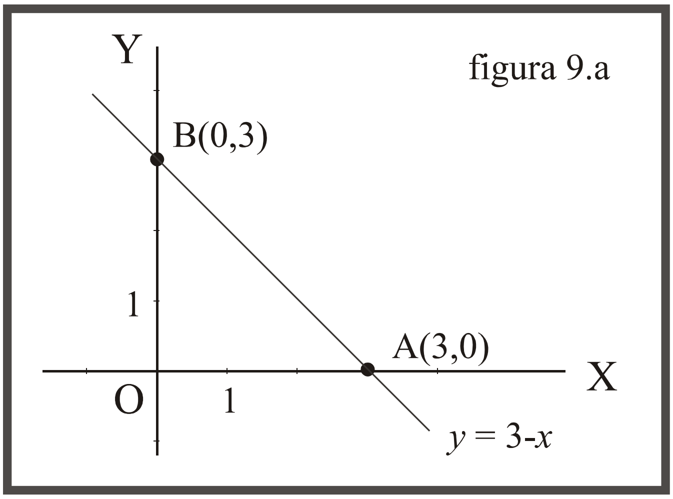


figura 9.a

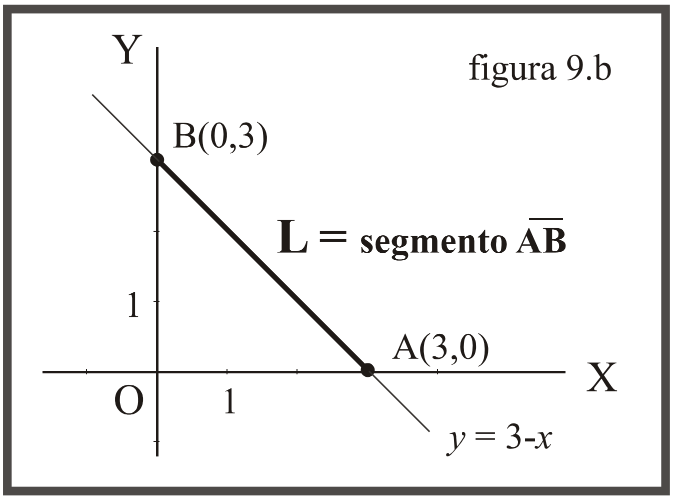


figura 9.b

Dibujamos $f(x)$ y determinamos el conjunto **L**:

En la ***figura* 9.a** hemos dibujado la gráfica de la función $y = 3\&x$ que se trata de una recta que pasa por los puntos A(3,0) y B(0,3) que corresponden a los cortes con los ejes.

En la ***figura* 9.b** hemos resaltado el conjunto **L**, formado por todos los puntos de la gráfica de $f(x)$ comprendidos entre A y B, es decir, el segmento de extremos dichos puntos.

Nótese que se forma un triángulo rectángulo e isósceles de vértices OAB, siendo Ô = 90º

Las distancias del origen O a los vértices A y B son:
d(O,A) = d(O,B) = 3

Es fácil ver que la distancia desde O a cualquier otro punto de **L** es menor que 3.

b) Recordemos la forma de hallar la distancia entre dos puntos del plano:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1, y_1) \;\; punto \; del \; plano \\ Q(x_2, y_2) \;\; punto \; del \; plano \end{array}\right\} \text{distancia } entre \;\; P \, y \, Q = d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Hallemos dos puntos cualesquiera del conjunto **L**:

$$\left.\begin{array}{l} Para \;\; x = 1 \rightarrow \; y = 3 - 1 = 2 \rightarrow \; P(1,2) \in L \\ Para \;\; x = 2 \rightarrow \; y = 3 - 2 = 1 \rightarrow \; Q(2,1) \in L \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d(O,P) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5} \approx 2'2361 \\ d(O,Q) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5} \approx 2'2361 \end{array}\right.$$

Se puede apreciar fácilmente que los puntos P(1,2) y Q(2,1) pertenecen a la recta de ecuación $y = 3\&x$ y, además, están en el conjunto **L**.

c) Imaginemos un punto cualquier P(*x,y*)0**L**.
Es evidente que la abcisa *x* de P debe verificar que 0#*x*#3
Por estar P(*x,y*) en **L**, está en la recta de ecuación *y* = 3&*x*
Entonces, es evidente que el punto P(*x,y*) verificará que es P(*x,*3&*x*)0**L**
Hallemos la distancia de O a P:

$$d(O,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (3-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 9}$$

Observamos que la distancia del punto O(0,0) al punto P(*x,y*)0**L** ***depende únicamente*** de la abcisa (*x*) de P.
Si consideramos que el valor de *x* debe estar entre 0 y 3 (ambos incluidos), podemos definir la función que relaciona el punto P(x,y) su distancia a O(0,0) :

$$\left.\begin{array}{l} [0,3] \xrightarrow{d} \mathrm{R} \\ x \;\rightarrow\; d(x) = +\sqrt{2x^2 - 6x + 9} \end{array}\right\} \; con\ la\ condici\grave{o}n\ de\ que\ P(x,y) \in \mathrm{L}$$

Comprobemos:

$$Para\ x = 1 \rightarrow\ P(1,2) \in \mathrm{L} \rightarrow\ d(1) = \sqrt{2-6+9} = \sqrt{5} = d(O,P)$$

$$Para\ x = 2 \rightarrow\ Q(2,1) \in \mathrm{L} \rightarrow\ d(2) = \sqrt{8-12+9} = \sqrt{5} = d(O,Q)$$

$$Para\ x = \frac{2}{5} \rightarrow\ H\left(\frac{2}{5},\frac{13}{5}\right) \in \mathrm{L} \rightarrow d\left(\frac{2}{5}\right) = \sqrt{\frac{8}{25} - \frac{12}{5} + 9} = \sqrt{\frac{173}{25}} = \frac{\sqrt{173}}{5} = d(O,H) \approx 2'6306$$

d) En el apartado c) hemos visto que se verifican las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} d(1) = d(O,P) = \sqrt{5} \\ d(2) = d(O,Q) = \sqrt{5} \end{array}\right\}$$

lo cual es una comprobación de que la imagen de *x* mediante la función *d*(*x*) coincide con la distancia desde un punto de **L** de abcisa *x* hasta el origen O.

e) Hemos visto que la función *d*(*x*) está definida en el intervalo cerrado [0,3] y nos da, para cada *x*0[0,3] la distancia desde el origen O hasta el punto de **L** cuya abcisa es *x*.
Veamos si *d*(*x*) verifica el teorema de Rolle en [0,3]

T ¿Es *d*(*x*) continua en [0,3]?

El radicando $2x^2 - 6x + 9$ *es una funciòn polinòmica de grado* 2 (*paràbola*)

Veamos para què valores se anula :

$$2x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-72}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{4} \notin \mathrm{R}$$

Observamos que el radicando de la función $d(x) = +\sqrt{2x^2 - 6x + 9}$ no se anula en ningún punto, es decir, su gráfica no corta al eje de abcisas y como su gráfica es una parábola cuyo vértice es un punto mínimo, se interpreta como que para cualquier valor de *x* es positiva, es decir, el radicando de *d*(*x*) es siempre positivo.
Por tanto, la función *d*(*x*) es continua en [0,3] ya que:

$$\forall a \in (0,3)\ es \left\{\begin{array}{l} d(a) = +\sqrt{2a^2 - 6a + 9} = +\sqrt{positivo} \in \mathrm{R} \\ \lim\limits_{x\to a} d(x) = \lim\limits_{x\to a} \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = +\sqrt{2a^2 - 6a + 9} = d(a) \end{array}\right.$$

$$Para\ x = 0\ es \left\{\begin{array}{l} d(0) = +\sqrt{2\cdot 0^2 - 6\cdot 0 + 9} = +\sqrt{9} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} d(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = +\sqrt{2\cdot 0^2 - 6\cdot 0 + 9} = 3 = d(0) \end{array}\right.$$

$$Para\ \ x = 3\ es \begin{cases} d(3) = +\sqrt{2\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + 9} = +\sqrt{9} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} d(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = +\sqrt{2\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + 9} = 3 = d(3) \end{cases}$$

Por tanto, "$d(x)$ ***es continua en el intervalo cerrado*** [0,3]"

• ¿Es $d(x)$ derivable en (0,3)?
Hallemos la derivada de $d(x)$:

$$d'(x) = \frac{4x-6}{2\sqrt{2x^2-6x+9}} = \frac{2x-3}{\sqrt{2x^2-6x+9}} = \frac{\text{numero positivo o negativo}}{\text{numero distinto de cero}}$$

Observamos que $\forall x \in (0,3)$ se verifica que $d'(x)$ existe.
Por tanto, "$d(x)$ ***es derivable en el intervalo abierto*** (0,3)"

• ¿Es $d(0) = d(3)$?

$$\left.\begin{array}{l} d(0) = +\sqrt{2\cdot 0^2 - 6\cdot 0 + 9} = 3 \\ d(3) = +\sqrt{2\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + 9} = 3 \end{array}\right\}\ es\ decir:\ d(0) = d(3)$$

Conclusión: La función $d(x) = +\sqrt{2x^2 - 6x + 9}$ definida en [0,3] verifica el teorema de Rolle.

f) Del apartado anterior deducimos que $\exists\ t \in (0,3)\ /\ d'(t) = 0$
Busquemos el valor de t :

$$d'(t) = \frac{2t-2}{\sqrt{2t^2-6t+9}} = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} = 1'5 \in (0,3)$$

Conclusión: El valor buscado es $t = \frac{3}{2} = 1'5 \in (0,3)$

Interpretación: En el punto T(1´5 , 1´5)$\in$L se verifica que la distancia de T a O es la máxima o mínima de todas las distancias de los puntos de L a O.
Es fácil apreciar por la *figura* 9.b que se trata de una distancia mínima.
Hallemos el valor de esa distancia:

$$d(O,T) = d\left(\tfrac{3}{2}\right) = +\sqrt{2\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6\cdot\tfrac{3}{2} + 9} = +\sqrt{\tfrac{9}{2} - 9 + 9} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2'12132034.... \approx 2'1213$$

g) Interpretemos gráficamente el resultado:
En la *figura* 10 tenemos la interpretación gráfica del resultado obtenido en el apartado **f)** Nótese que T es el punto medio del segmento **AB** y el segmento **OT** es precisamente la altura (sobre la hipotenusa) del triángulo rectángulo AOB, es decir, la menor de las distancias existentes entre el punto O y los puntos de **L**.
Eso hace que $d'(1´5) = 0$ y $d''(1´5) > 0$

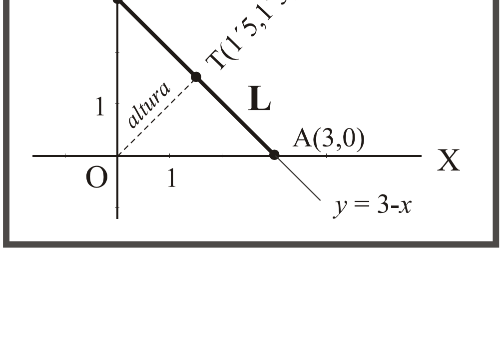


figura 10

Ejemplo 3.-

Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Queremos saber si verifica el teorema de Rolle en el intervalo [&1,1]

Veamos:

3 Recordemos el teorema de Rolle en el caso que nos ocupa:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \;\; continua \;\; en[-1,1] \\ f(x) \;\; derivable \;\; en \;\; (-1,1) \\ f(-1) = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (-1,1) \mid f'(\alpha) = 0$$

3 ¿Es $f(x)$ continua en [&1,1]?

Para todo x0[&1,1] $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{positivo \;\; o \;\; cero} \in R$

Para todo a0(&1,1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{a^2} = f(a) \in R$

Para x =&1 es $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\left(-1^+\right)^2} = \sqrt[3]{1} = 1 = f(-1) \in R$

Para x =1 es $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\left(1^-\right)^2} = \sqrt[3]{1} = 1 = f(1) \in R$

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [&1,1].

3 ¿Es $f(x)$ derivable en (&1,1)?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Observamos que para $x = 0$0(&1,1) ocurre que $f'(0)$ óú, es decir, la función f no es derivable en el intervalo abierto (&1,1).

Conclusión: La función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [&1,1]. Esto significa que ***no podemos asegurar*** que exista un punto α del intervalo (&1,1) en el cual se anule la derivada. No obstante, puede apreciarse a simple vista que dicho punto no existe.

4.Teorema de Cauchy.-

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b], derivables en el intervalo abierto (a,b), $g(a)$ ... $g(b)$ y sus derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a,b), entonces existe al menos un punto α del intervalo (a,b) tal que: $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Matemáticamente lo expresamos del modo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ y\ g(x)\ \textit{funciones continuas en } [a,b] \\ f(x)\ y\ g(x)\ \textit{derivables en } (a,b) \\ g(a) \neq g(b) \\ \nexists\, t \in (a,b)\ \textit{tal que }\ f'(t) = g'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (a,b) \ \Big|\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Demostración:

- Definimos la siguiente función en el intervalo $[a,b]$:

$$\left.\begin{array}{l} [a,b] \xrightarrow{F} \mathbb{R} \\ x \ \rightarrow\ F(x) = f(x)\cdot\big[g(b)-g(a)\big] - g(x)\cdot\big[f(b)-f(a)\big] \end{array}\right\}$$

- La función $F(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ por ser de la forma $F(x) = \gamma f(x) - \lambda g(x)$, siendo $\gamma,\lambda \in \mathbb{R}$ y $f(x)$, $g(x)$ continuas en $[a,b]$, es decir, $F(x)$ es una combinación lineal de dos funciones continuas.
- La función $F(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a,b) ya que por las reglas de la derivación:

$$F'(x) = [g(b) - g(a)]\,f'(x) - [f(b) - f(a)]\,g'(x) = \gamma f'(x) - \lambda g'(x)$$

donde $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para cualquier valor del intervalo (a,b).

- Además se verifica que $F(a) = F(b)$. En efecto:

$F(a) = [g(b) - g(a)]\,f(a) - [f(b) - f(a)]\,g(a) =$
$= g(b)\cdot f(a) - g(a)\cdot f(a) - f(b)\cdot g(a) + f(a)\cdot g(a) = g(b)\cdot f(a) - f(b)\cdot g(a)$

$F(b) = [g(b) - g(a)]\,f(b) - [f(b) - f(a)]\,g(b) =$
$= g(b)\cdot f(b) - g(a)\cdot f(b) - f(b)\cdot g(b) + f(a)\cdot g(b) = f(a)\cdot g(b) - g(a)\cdot f(b)$

Obsérvese que $F(a) = F(b) = f(a)\cdot g(b) - g(a)\cdot f(b)$

Por tanto, la función $F(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[a,b]$, por lo que podemos asegurar que:

$$\exists \alpha \in (a,b) \ \big|\ F'(\alpha) = 0$$

Es decir:

$$F'(\alpha) = \big[g(b) - g(a)\big]\,f'(\alpha) - \big[f(b) - f(a)\big]\,g'(\alpha) = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\big[g(b) - g(a)\big]\,f'(\alpha) = \big[f(b) - f(a)\big]\,g'(\alpha)$$

De donde deducimos que:

$$\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \textit{como queriamos demostrar}$$

Ejercicio 4.-

Comprobar el teorema de Cauchy en el intervalo cerrado $[-3, 2]$ para las funciones:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 5 \\ g(x) = -x^2 - 4x \end{cases}$$

Solución:

L Tanto *f*(*x*) como *g*(*x*) son funciones polinómicas de grado 2 (parábolas), por lo que son continuas en todo ú. Al estar definidas únicamente en el intervalo [&3, 2], podemos asegurar que son continuas en dicho intervalo.

L Las derivadas de *f* y *g* son respectivamente:

f ´(*x*) = 2*x*

g´(*x*) = &2*x*&4

las cuales existen para cualquier valor *x*0(&3,2)

Por tanto, ***f*** y ***g*** son derivables en el intervalo abierto (&3,2).

L Veamos si *g*(&3) ... *g*(2) :

g (&3) = &(&3)^2 &4·(&3) = &9 + 12 = 3

g (2) = &2^2 & 4·2 = &4 & 8 = &12

Es decir, *g*(&3) ... *g*(2)

L Veamos si las derivadas de ***f*** y ***g*** se anulan en un mismo punto de (&3,2) :

f ´(*x*) = 2*x* = 0 Y *x* = 0

g ´(*x*) = &2*x* & 4 = 0 Y *x* = &2

Es decir, ***no existe*** un *t* 0(&3,2) tal que *f ´*(*t*) = *g´*(*t*) = 0

Conclusión:

Aseguramos que existe un número α 0(&3,2) tal que $\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \dfrac{f(2)-f(-3)}{g(2)-g(-3)}$

Hallemos el valor de α :

$$\left.\begin{array}{l} f(-3)=4 \ ; \ f(2)=-1 \\ g(-3)=3 \ ; \ g(2)=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\alpha}{-2\alpha-4} = \frac{-1-4}{-12-3}$$

$$\frac{2\alpha}{-2\alpha-4} = \frac{-5}{-15} \ ; \ \frac{2\alpha}{-2\alpha-4} = \frac{1}{3} \ ; \ 6\alpha = -2\alpha-4 \ ; \ 8\alpha = -4 \ ; \ \alpha = -\frac{1}{2}$$

Conclusión:

El valor buscado es $\alpha = -\frac{1}{2}$, es decir: $\dfrac{f'\left(\frac{-1}{2}\right)}{g'\left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{f(2)-f(-3)}{g(2)-g(-3)}$

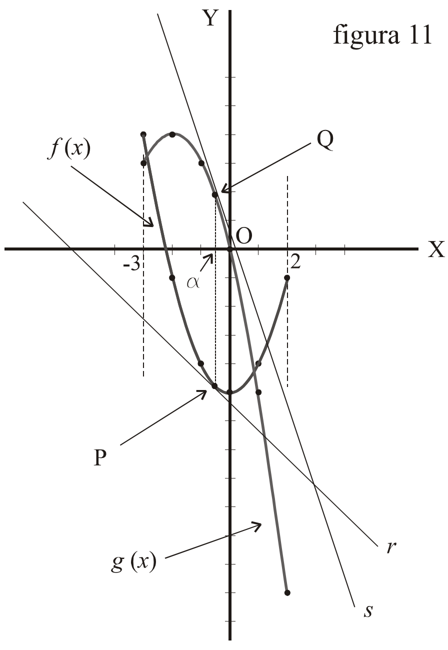


figura 11

En la *figura* 11 tenemos representado el problema gráficamente.

3 Recuerda que para dibujar las parábolas es conveniente primero determinar los vértices. En este caso es V$_f$ (0,&5) y V$_g$ (&2,4). Posteriormente, con una tabla de valores se construyen las curvas.

3 Se aprecia como las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) verifican las hipótesis del teorema de Cauchy, es decir, son continuas en [&3,2], derivables en (&3,2), *g*(&3) es distinto de *g*(2) y no existen dos puntos de las gráficas, (*t* , *f* (*t*)) y (*t* , *g*(*t*)), en los que las pendientes sean cero (los puntos con la misma abcisa).

3 Hemos dibujado las rectas ***r*** y ***s*** que corresponden a las tangentes a las gráficas en los puntos de abcisa α=&0´5,es decir, P(&0´5,*f*(&0´5)) y Q(&0´5 , *g*(&0´5)), esto es, P(&0´5 , &3´8) y Q(&0´5 , 1´75).

Ejemplo 4.-

Queremos comprobar el teorema de Cauchy para las funciones $s(x) = e^x$ y $r(x) = x - 3$ en el intervalo cerrado [0, 3].

Veamos:

- Las funciones $s(x) = e^x$ y $r(x) = x - 3$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ (se aprecia a simple vista porque conocemos sus gráficas), por lo que son continuas en el intervalo cerrado [0, 3].
- Sus funciones derivadas son:
  $s'(x) = e^x$ y $r'(x) = 1$ que vemos existen para cualquier valor del intervalo (0, 3)
- Observamos que tanto $s(x) = e^x$ como $r(x) = x - 3$ verifican las desigualdades correspondientes en los extremos del intervalo, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} s(0) = e^0 = 1 \\ s(3) = e^3 \end{array}\right\} s(0) \neq s(3) \quad y \quad \left.\begin{array}{l} r(0) = -3 \\ r(3) = 0 \end{array}\right\} r(0) \neq r(3)$$

  Por tanto, cualquiera de las dos puede aparecer en el denominador de la fórmula de Cauchy.
- Observamos que no existe un valor $t \in (0,3)$ tal que $s'(t) = r'(t) = 0$ ya que la ecuación $s'(x) = e^x = 0$ no tiene solución y $r'(x) = 1 \neq 0$.

Conclusión:

Podemos asegurar que $\exists\, \alpha \in (0,3)$ tal que $\dfrac{s'(\alpha)}{r'(\alpha)} = \dfrac{s(3) - s(0)}{r(3) - r(0)}$

Hallemos el valor de α :

$$\frac{e^\alpha}{1} = \frac{e^3 - e^0}{0 + 3} \quad \textit{buscamos } \alpha$$

$$e^\alpha = \frac{e^3 - 1}{3} \quad \text{tomando logaritmos neperianos}$$

$$L e^\alpha = e^3 - 1 \quad ; \quad \alpha\, Le = L\left(e^3 - 1\right) \quad ; \quad \alpha \cdot 1 = L\left(e^3 - 1\right)$$

$$\textit{Obtenemos que } \alpha = L\left(e^3 - 1\right) = L19'0855369..... = 2'94893081....$$

Por tanto, el valor de α que verifica el teorema de Cauchy en este caso es:

$$\boxed{\alpha = 2'94893081.... \in (0,3)}$$

5.Teorema del valor medio.-

Este teorema, también conocido como ***teorema de los incrementos finitos*** o ***teorema de Lagrange***, es una consecuencia del teorema de Cauchy y dice lo siguiente:

> Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b), entonces existe un valor α perteneciente a (a,b) tal que se verifica la igualdad $f(b) - f(a) = f'(\alpha) \cdot (b - a)$

Observa que α es un valor intermedio entre a y b, de ahí el nombre del teorema.

Demostración:

La demostración de este teorema se basa en aplicar el teorema de Cauchy a las funciones $f(x)$ e $\mathrm{I}(x) = x$ (función identidad).

Veamos:

3 Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

3 La función $\mathrm{I}(x) = x$ (su gráfica es una recta) es continua en cualquier intervalo cerrado y derivable ($\mathrm{I}'(x) = 1$) en cualquier intervalo abierto.

3 Se verifica que $\mathrm{I}(a) = a$ ... $b = \mathrm{I}(b)$ al ser $a < b$.

3 Es evidente que ***no existe*** un valor t0(a,b) tal que $f'(t) = \mathrm{I}'(t) = 0$ ya que $\mathrm{I}'(t) = 1$ para cualquier valor t.

Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy para las funciones $f(x)$ e $\mathrm{I}(x)$ en el intervalo $[a,b]$ y como consecuencia:

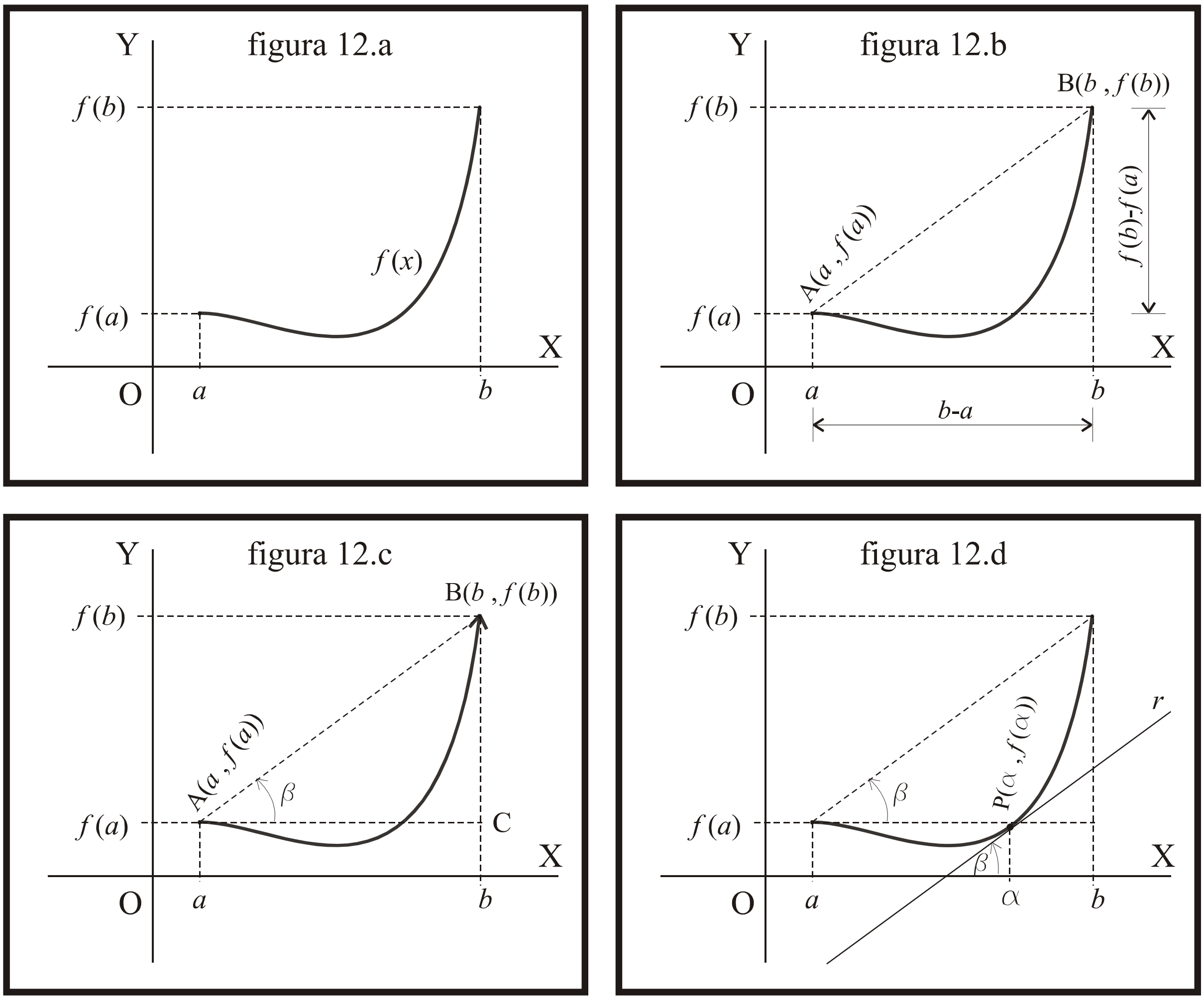
$$\exists \alpha \in (a,b) \;\Big|\; \frac{f'(\alpha)}{\mathrm{I}'(\alpha)} = \frac{f(b) - f(a)}{\mathrm{I}(b) - \mathrm{I}(a)}$$

Es decir: $\dfrac{f'(\alpha)}{1} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Despejando: $f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a)$ *como queríamos demostrar*

Especialmente interesante es la interpretación gráfica de este teorema. Veamos:

figura 12



La *figura* 12 es una interpretación gráfica del teorema del valor medio. Expliquemos esto:

figura 12.a Esta figura nos muestra la gráfica de una función $f(x)$. A simple vista se aprecia que es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). En este caso ocurre que el valor $f(a)$ es menor que $f(b)$, pero podría ser que $f(a) \geq f(b)$ y la interpretación gráfica ser la misma.	*figura* 12.b Hemos trazado el segmento (cuerda) que une los puntos de la gráfica $A(a,f(a))$ y $B(b,f(b))$. Obsérvese que se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $f(b)-f(a)$ y $b-a$. No olvidemos que $f(a)$ y $f(b)$ existen por ser la función f continua en $[a,b]$
figura 12.c El triángulo ACB es rectángulo, siendo $\hat{C}=90º$ Destacamos el ángulo de dicho triángulo que se forma en el vértice A, es decir, $\hat{A}=\beta$. Si tomamos la tangente de ese ángulo : $tg\,\beta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Recordemos que este número ($tg\,\beta$) puede ser positivo o negativo. En este caso, por la forma de la gráfica (β es un ángulo comprendido entre 0º y 90º) es positivo.	*figura* 12.d Según el teorema visto, existe un punto α del intervalo (a,b) tal que: $f'(\alpha)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Por la interpretación geométrica de la derivada en un punto, es: $m_r = tg\,\beta = f'(\alpha)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ siendo r la recta tangente a la curva en el punto $P(\alpha, f(\alpha))$ y m_r su pendiente. Es decir, la recta r y la cuerda AB son paralelas.

Conclusión a la interpretación gráfica:

> Si una función $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(\alpha, f(\alpha))$ es paralela al segmento que une los puntos $A(a,f(a))$ y $B(b,f(b))$.

Observación:

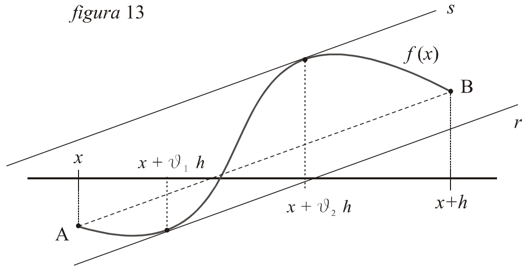
La expresión $f'(\alpha)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ puede modificarse del siguiente modo:

$$llamamos\begin{cases} a = x \\ b = x+h \quad (h>0) \\ \alpha = x+\vartheta\cdot h \quad (0<\vartheta<1)\end{cases} \qquad entonces \quad f(x+h)-f(x) = f'(x+\vartheta\cdot h)\cdot h$$

Nótese que al ser $0<\theta<1$ es $(x+\theta\cdot h)\in(x, x+h)$, por lo que la conclusión del teorema podría ser : $\exists\theta\in(0,1)$ tal que $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta\cdot h)\cdot h$

Gráficamente se aprecia en la *figura* 13 en la que hemos dibujado una gráfica de $f(x)$ que cumple el teorema y además existen dos puntos de $(x,x+h)$, $x+\theta_1\cdot h$ y $x+\theta_2\cdot h$ en los que se verifica la igualdad.

figura 13



Ejemplo 5.-

Queremos comprobar el teorema del valor medio para la función $f(x) = \&x^2 + 5$ en el intervalo [&3,2]

Veamos:

3 Es evidente que la función $f(x) = \&x^2 + 5$ es continua en [&3,2] y derivable en (&3,2), por lo que es posible aplicar el teorema.

3 En este ejemplo actuaremos del siguiente modo:

Î Dibujaremos la gráfica de la función $f(x)$ y el segmento que une los puntos de dicha gráfica P(&3, f(&3)) y Q(2 , f(2)).

Ï Trazamos, con las herramientas necesarias, la recta (o rectas) paralelas al segmento **PQ** que sean tangentes a la gráfica de $f(x)$.

Ð Determinaremos el punto (o puntos) de tangencia y damos una aproximación de la abcisa α (o abcisas) de ese punto.

Ñ Hallamos esa abcisa (o abcisas) con exactitud, aplicando el teorema del valor medio.

Seguimos los pasos marcados:

Î Para dibujar la gráfica de f, construimos una tabla de valores:

x	$y = \&x^2 + 5$
0	5
1	4
&1	4
2	1
&2	1
&3	&4

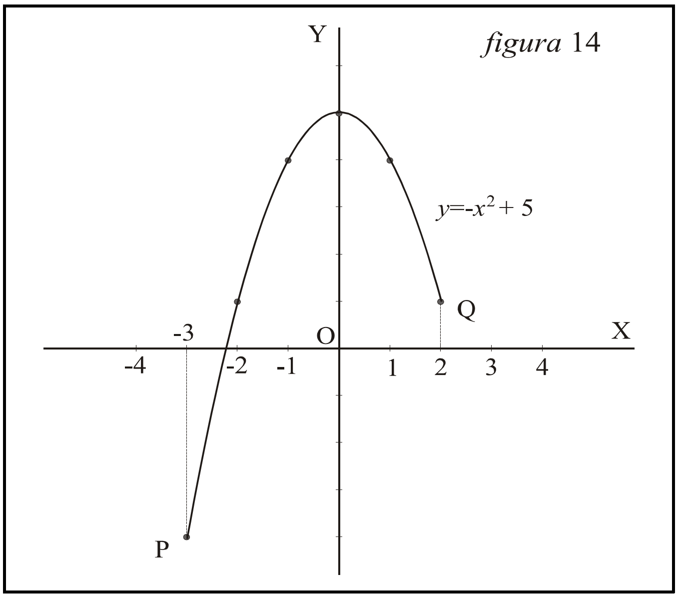


figura 14

En la *figura* 14 tenemos la representación gráfica de la parábola de ecuación $y = \&x^2 + 5$, en el intervalo cerrado [&3,2]. Hemos señalado los punto extremos de la curva, es decir, P(&3,&4) y Q(2,1).

En la *figura* 15 hemos añadido el segmento que une los puntos P y Q, es decir, segmento **PQ**.

Debemos buscar un punto de la curva en el que la recta tangente sea paralela al segmento **PQ** (o recta que pasa por los puntos P y Q).

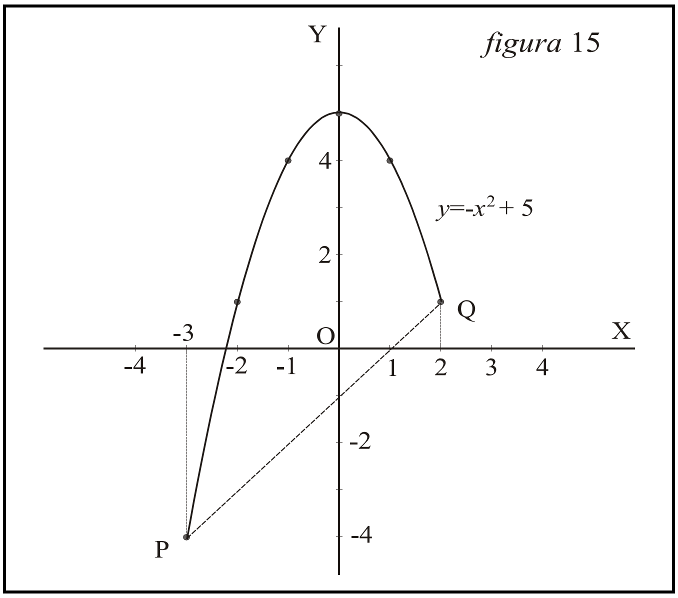


figura 15

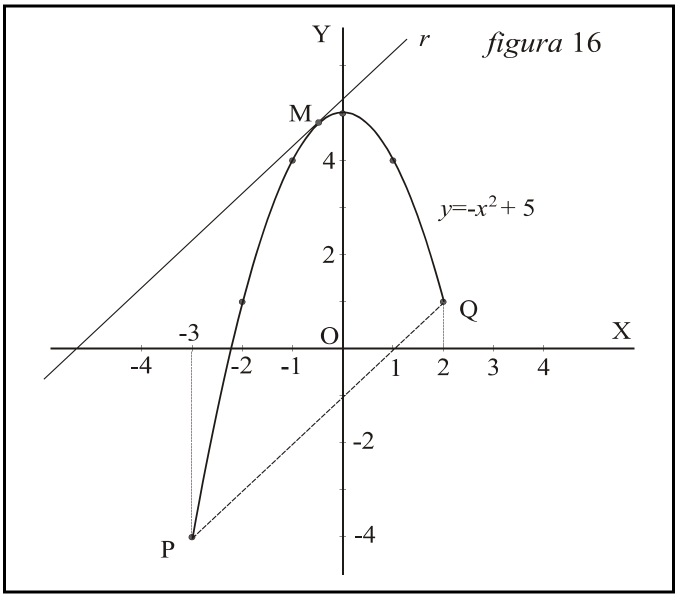


figura 16

Ï En la *figura* 16 hemos añadido la recta ***r***, paralela al segmento **PQ** y tangente a la parábola en un punto M.

Si el dibujo se hubiese realizado a mano alzada, nos habríamos ayudado de escuadra y cartabón hasta encontrar, aproximadamente el punto M.

Ð Ahora de un modo aproximado podríamos determinar el punto M. Por ejemplo M(&0´5 , 4´8).

Ñ En este apartado determinaremos el punto M con exactitud. Veamos:

4 Aplicando el ***teorema del valor medio*** en este caso, sabemos que existe un valor α0(&3,2) tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)}$$

Operando:

$$\left.\begin{array}{l} f'(\alpha) = -2\alpha \\ \dfrac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \dfrac{1 - (-4)}{5} = \dfrac{5}{5} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} = -0'5$$

Por tanto, la abcisa del punto M es $\alpha = -\frac{1}{2} = -0'5$

4 Ahora calculamos la ordenada del punto M. Considerando que M está en la gráfica de la función $f(x) = \&x^2 + 5$, tenemos:

$$f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = -\frac{1}{4} + 5 = \frac{19}{4} = 4'75$$

Conclusión: En el punto $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right) = (-0'5, 4'75)$ perteneciente a la gráfica de la función $f(x) = \&x^2 + 5$, la recta tangente en M es paralela a la recta que une los puntos P(&3, *f*(&3)) y Q(2 , *f*(2)).

Ejercicio 5.-

Un punto se mueve en el intervalo de tiempo (en horas) [0,9] de tal modo que el espacio (en km) recorrido en función de ese tiempo que transcurre es $e = 2\sqrt{t}$, siendo ***e*** el espacio y ***t*** el tiempo. Contestar a las siguientes cuestiones.

a) Determina la relación existente entre las magnitudes ***e*** y ***t*** como una función real de variable real.

b) Dibuja, de un modo aproximado, la gráfica de dicha función.
c) Halla el espacio recorrido en el instante inicial, después de 4, de 5 horas y al final del trayecto (9 horas).
d) ¿Cuál es la velocidad media en los instantes $t = 0$, $t = 4$, $t = 5$ y $t = 9$?
e) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando el tiempo es 4 horas y media?
f) ¿En qué instante la velocidad del punto coincide con la velocidad media final?

Solución:

a) El enunciado nos plantea una relación funcional entre dos magnitudes: el ***espacio*** (en kilómetros) que recorre un punto a medida que transcurre un ***tiempo*** (en horas). Esta última magnitud está condicionada al intervalo [0,9], es decir, *t* O[0,9].
Por tanto, en forma de función podemos expresar:

$$\left.\begin{array}{l}[0,9] \longrightarrow \mathrm{R} \\ \quad t \qquad e = 2\sqrt{t}\end{array}\right\} \textit{ siendo } \begin{cases} t = \text{variable } \textit{independiente} \\ e = \text{ variable } \textit{dependiente.}\end{cases}$$

b) Para dibujar la gráfica nos ayudamos de una tabla de valores.

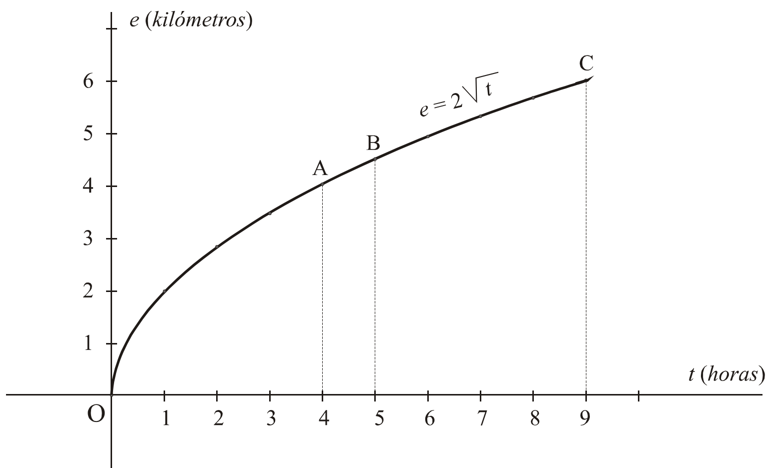


figura 17

En la *figura* 17 hemos representado, de un modo aproximado, a la función $e = 2\sqrt{t}$ y señalados los puntos de su gráfica que nos serán útiles en los apartados siguientes, es decir:

$$\mathrm{O}(0,0)\ ;\ \mathrm{A}(4,4)\ ;\ \mathrm{B}\left(5,2\sqrt{5}\right)\ y\ \ \mathrm{C}(9,6)$$

t	$e = 2\sqrt{t}$
0	0
1	2
2	2´828427....
3	3´464101....
4	4
5	4´472135....
6	4´898979....
7	5´291502....
8	5´656854....
9	6

c) Hallando las imágenes de la función $e(t) = 2\sqrt{t}$ para los valores $t = 0$, $t = 4$, $t = 5$ y $t = 9$, tendremos los espacios recorridos al cabo de esos instantes. Veamos:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow\ e(0) = 2\sqrt{0} = 0\ \ km \\ t = 4 \rightarrow\ e(4) = 2\sqrt{4} = 4\ \ km \\ t = 5 \rightarrow\ e(5) = 2\sqrt{5} = 4'47213....\ \ km \\ t = 9 \rightarrow\ e(9) = 2\sqrt{9} = 6\ \ km \end{cases}$$

d) Recordemos que la velocidad media de un vehículo es el cociente entre el espacio recorrido en un tiempo y ese tiempo. En este caso podemos considerar que la velocidad media es una función con variable independiente ***t***, es decir:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{2\sqrt{t}}{t} \quad o\, lo\ que\ es\ lo\ mismo: \quad v(t) = \frac{2\sqrt{t}}{t}$$

Debe resultar fácil comprender la siguiente definición para esta función:

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{t}}{t} & si \quad t \in (0,9] \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

> La función anterior se denomina "*velocidad media*" y nos da la velocidad media del punto en cada instante ***t***. Es evidente que en el instante inicial dicha velocidad es 0 km/h.

Hallemos las velocidades medias solicitadas:

Instante inicial $\rightarrow$ $t = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \quad km/h$

Al cabo de 4 horas $\rightarrow$ $t = 4 \Rightarrow v(4) = \frac{e}{t} = \frac{2\sqrt{4}}{4} = 1 \quad km/h$

Al cabo de 5 horas $\rightarrow$ $t = 5 \Rightarrow v(5) = \frac{e}{t} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0'89442.... \quad km/h$

Al cabo de 9 horas $\rightarrow$ $t = 9 \Rightarrow v(9) = \frac{e}{t} = \frac{2\sqrt{9}}{9} = \frac{2}{3} = 0'66666.... \quad km/h$

Puede apreciarse que la velocidad media del punto disminuye a medida que aumenta el tiempo en el intervalo (0,9]

e) En este apartado nos piden la velocidad que lleva el punto en el instante $t = 4'5$ horas. Quede claro que no se trata de la velocidad media cuando ha pasado ese tiempo, sino de la velocidad que lleva en ese instante. Veamos:
Recordemos el concepto de velocidad instantánea:

- Imaginemos el instante $t = 4'5$ horas. En ese instante el espacio recorrido por el punto es $e(4'5) = 2\sqrt{4'5}$ *km.*
- Consideremos un incremento del tiempo, Δt, que suponemos infinitamente pequeño. En el instante $4'5 + \Delta t$, el espacio total recorrido por el punto será $e(4'5 + \Delta t) = 2\sqrt{4'5 + \Delta t}$ *km.*
- Podemos considerar que la velocidad instantánea de un punto es la velocidad media que lleva en ese instante para un incremento de tiempo infinitamente pequeño, es decir:

$$Velocidad\ media\ en\ el\ periodo\ de\ tiempo\ [4'5\ ,\ 4'5 + \Delta t] =$$

$$v = \frac{espacio\ recorrido\ en\ el\ tiempo\ \Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \frac{e(4'5 + \Delta t) - e(4'5)}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{4'5 + \Delta t} - 2\sqrt{4'5}}{\Delta t}$$

Tomando límite en la expresión anterior, cuando $\Delta t \to 0$ tendremos la velocidad del punto en el instante $t = 4'5$ horas :

$$velocidad\ en\ el\ \text{instante}\ t = 4'5 \rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(4'5 + \Delta t) - e(4'5)}{\Delta t}$$

Observando la expresión anterior notamos que se trata de la derivada de la función $e(t) = 2\sqrt{t}$ en el punto t = 4´5, por lo que hallaremos la función derivada de $e(t) = 2\sqrt{t}$

$$e'(t) = 2\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{t}$$

En el instante t = 4´5 horas :

$$\boxed{e'(4'5) = \frac{\sqrt{4'5}}{4'5} \ km/h = 0'471404.... \ km/h}$$

Es la velocidad instantánea en el instante t = 4´5 horas.

La interpretación gráfica del resultado obtenido es que la velocidad instantánea en el instante *k* 0(0,9] coincide con el valor de la derivada de la función $e(t) = 2\sqrt{t}$ en ese punto *k*. Este valor coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva $e(t) = 2\sqrt{t}$ en el punto P(*k*, *e*(*k*)).
Para el caso visto t = 4´5 la interpretación gráfica es:

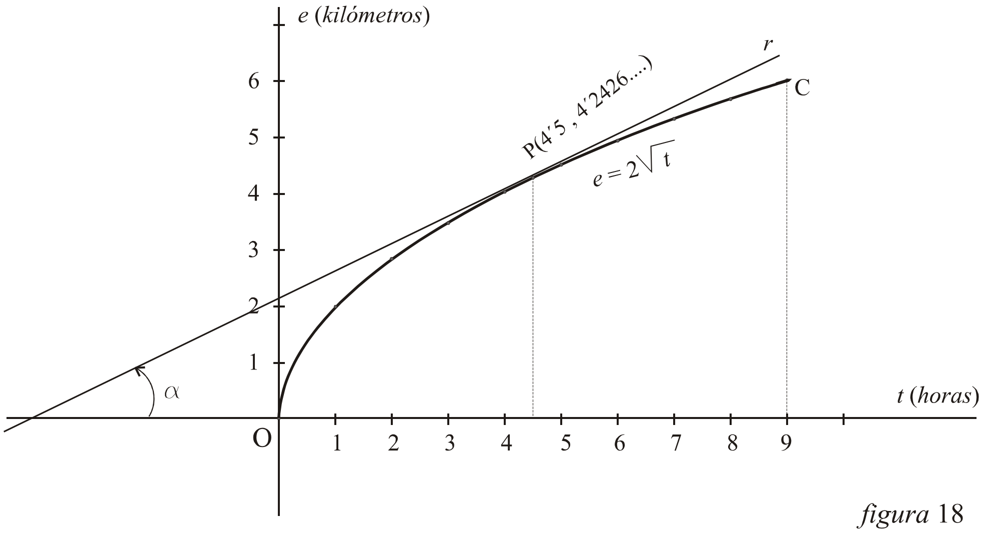


figura 18

En la *figura* 18 tenemos, además de la gráfica de la función $e(t) = 2\sqrt{t}$, la recta *r*, tangente a ella en el punto P(4´5 , *e*(4´5)). La pendiente de esa recta es el valor de la derivada de *e* (*t*) en *t* = 4´5 y la velocidad que el punto lleva en el instante *t* = 4´5
Matemáticamente:

$$e'(4'5) = 0'471404.....km/h = v_{inst}(t = 4'5)) =$$
$$= tg\,\alpha = pendiente\ de\ r = m_r$$

f) La velocidad media final es al cabo de las 9 horas, es decir:

$$v(9) = \frac{2\sqrt{9}}{9} = \frac{2}{3} = 0'6666..... \quad km/h$$

Ahora buscamos un punto *k* 0(0,9) talque la velocidad instantánea en *k* es igual a dicha

velocidad media, es decir, a v(9) = 0´6666.....
Obsérvese lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} v(9) = \dfrac{\textit{espacio recorrido al cabo de las 9 horas}}{9\ (\textit{número de horas})} = \dfrac{e(9)}{9} = \dfrac{2\sqrt{9}}{9} = \dfrac{2}{3} = 0'6666....\ km/h \\ v_{inst}(t=k) = e'(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{2}{3}\ \ km/h \end{array}\right\}$$

Nos hacemos la siguiente pregunta:
¿Existe el valor k $\in$ (0,9) ?. *¿Existe un punto en el intervalo* (0,9) *tal que la velocidad en ese instante coincide con la velocidad media*?
Para contestar a esas preguntas añadimos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} v(9) = \dfrac{e(9)-e(0)}{9-0} = \left\{\begin{array}{l} \textit{pendiente del segmento (o recta) que} \\ \textit{une los puntos extremos } O(0,0) \textit{ y } C(9,6) \end{array}\right\} \\ v_{inst}(t=k) = \left\{\begin{array}{l} \textit{pendiente de la recta } \text{tangente } \textit{a la curva} \\ e(t) = 2\sqrt{t} \textit{ en el punto } M(k, e(k)) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

Nótese que lo expuesto anteriormente se adapta a las condiciones del *Teorema del valor Medio* aplicado a la función $e(t) = 2\sqrt{t}$ en el intervalo cerrado [0,9]. Veamos:

$$e(t) = 2\sqrt{t} \textit{ es una funciòn} \left\{\begin{array}{l} \textit{continua en el } \text{intervalo } [0,9] \\ \textit{derivable en el } \text{interval } (0,9) \end{array}\right.$$

Por tanto, podemos asegurar que:

$$\exists\, k \in (0,9)\ \Big|\ e'(k) = \frac{e(9)-e(0)}{9-0}$$

Ya sabemos que el valor *k* buscado, existe. Lo hallamos:

$$\frac{2\sqrt{9}-0}{9-0} = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \ ;\ \ \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \ ;\ \ \sqrt{k} = \frac{3}{2}\ \ ;\ \ k = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2'25\ \ horas.$$

Por tanto:
"En el instante $t = 2'25$ *horas* (2 *horas* 15 minutos) la velocidad que lleva el punto es igual a la velocidad media al cabo de 9 horas".
Interpretemos el resultado gráficamente:

En la *figura* 19 se aprecia como la recta *r*, tangente en el punto P(2´25,*e*(2´25)), o sea P(2´25,3), es paralela al segmento que une los puntos O(0,0) y C(9,6).
Nótese que la pendiente de *r* es:

$$m_r = tg\,\alpha = \frac{6}{9} = $$
$$= v(9) =$$
$$= v_{inst}(2'25)$$

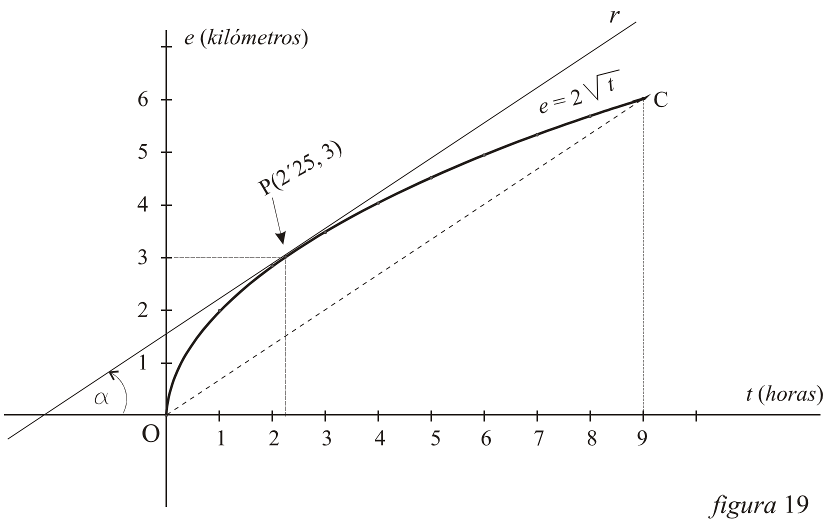


figura 19

6.Consecuencias del teorema del valor medio.-

Del ***teorema del valor medio*** obtenemos las siguientes consecuencias:

Î "*Si la derivada de una función es nula en todos los puntos de un intervalo, la función es constante en él* "
En efecto:
NOTA: Recordemos que si una función es derivable en un punto, es continua en él.
Sea $f(x)$ una función y $[a,b]$ un intervalo en el que f es continua.
Supongamos que œx0(a,b) es $f'(x) = 0$
Tomemos dos puntos cualesquiera x y $x + h$ ($h>0$) del intervalo $[a,b]$.
Entonces, el intervalo $[x, x + h]$ está contenido en el intervalo $[a,b]$. Es decir:
$[x, x + h]$ d $[a,b]$ y $(x, x + h)$ d (a,b)
Es evidente que:
f es continua en $[x, x + h]$
f es derivable en $(x, x + h)$ y la derivada es 0 en cualquier punto de ese intervalo.
Aplicando el *Teorema del Valor Medio* a la función f en el intervalo $[x, x + h]$:

$$\exists\, \alpha \in \left(x, x+h\right) \;\Big|\; f'(\alpha) = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De otro modo: $f'(\alpha)\cdot h = f(x+h) - f(x)$

Como $f'(\alpha) = 0$, entonces $f(x+h) - f(x) = 0$

Por tanto: $f(x+h) = f(x)$

Recordemos que x y $x+h$ son dos puntos cualesquiera de $[a,b]$

Conclusión: "*Si tomamos dos puntos cualesquiera* x y $x+h$ *del intervalo* $[a,b]$, *sus imágenes son iguales*, *es decir, la función* $f(x)$ *es constante en todo* $[a,b]$*"*

Ï "*Si dos funciones tienen el mismo valor para la derivada en todos los puntos de un intervalo, dichas funciones difieren en una constante en ese intervalo*"
Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ y\ \ g(x)\ dos\ \ funciones \\ (a,b)\ un\ \text{intervalo abierto.} \\ f'(x) = g'(x)\ \ \forall x \in \left(a,b\right) \end{array}\right\} \Rightarrow\ f(x) - g(x) = k\ \ \text{(constante)}\ \ \forall x \in (a,b)$$

En efecto:

$$\forall x \in (a,b)\ \ es\ \ f'(x) = g'(x)\ \Rightarrow\ \forall x \in (a,b)\ \ es\ \ f'(x) - g'(x) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \forall x \in (a,b)\ \ es \left[f(x) - g(x)\right]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ La\ \ funciòn\ \ F(x) = f(x) - g(x)\ \ tiene\ derivada\ \ igual\ a\ 0\ \ en\ el\ \text{int}ervalo\ (a,b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ F(x) = f(x) - g(x)\ es\ una\ \ funciòn\ \ \text{constante}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) - g(x) = \ k\ \text{(constante)}\ \ \forall x \in (a,b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ Las\ \ funciones\ \ f(x)\ \ y\, g(x)\ \ difieren\ en\ una\ \text{constante}\ en\ el\ \text{intervalo}\ (a,b)$$

La interpretación gráfica de esta consecuencia es la siguiente:
"*Si dos funciones tienen igual derivada en un intervalo* (a,b), *entonces sus gráficas son*

dos líneas (*rectas o curvas*) *paralelas en ese intervalo*".
Es decir:

La *figura* 20 nos muestra las gráficas de dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) que son líneas curvas paralelas en el intervalo (*a*,*b*). Nótese como en cualquier punto α0(*a*,*b*) las rectas (*r* y *s*) tangentes a las curvas son paralelas, es decir, se verifica que *f*´(α) = *g*´(α) y, además, *f*(α) & *g*(α) = *k*.

Por tanto, si dos funciones tienen igual valor para la derivada en cada punto de un intervalo, sus gráficas son paralelas en ese intervalo.

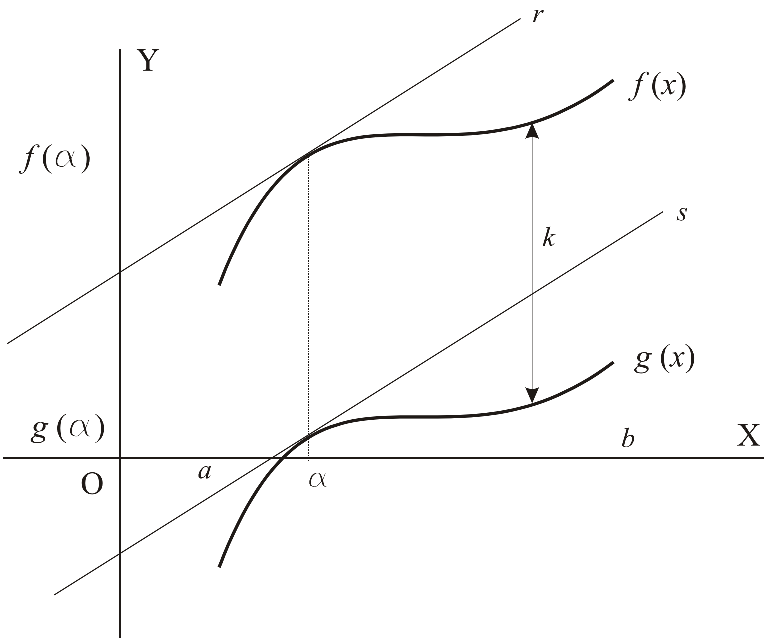


figura 20

7.Regla de L´Hôpital.-

Esta se apoya en el *Teorema de Cauchy* y se utiliza para el cálculo de algunos límites indeterminados. Dice lo siguiente:

> Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones y ***a*** un número real tales que:
> Î f y g son derivables en un entorno de ***a***
> Ï $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$
> Entonces se verifica que :
> $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ en el caso que exista el segundo límite

Es decir:

Supongamos que deseamos hallar el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Para ello actuamos del modo conocido: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminado

Es decir, nos hemos encontrado con una indeterminación.
Para salvar la indeterminación, si se verifican las condiciones adecuadas, podemos aplicar la **Regla de L´Hôpital**.:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

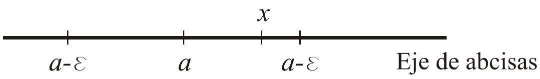
> Recordemos que *f* y *g* son derivables en un entorno $E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Puede ocurrir que el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ no exista y, sin embargo, si existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Demostración:

- Al ser ***f*** y ***g*** dos funciones derivables en el entorno $E_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, es posible encontrar un intervalo cerrado $[a, x] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en el cual las funciones *f* y *g* sean continuas y derivables (recordar que toda función derivable en un punto es continua en él). Gráficamente:

figura 21

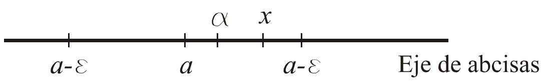


> Es evidente que todas las condiciones que cumplan *f* y *g* en el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, las cumplirán en $[a,x]$

- Supongamos que se puede aplicar el **teorema de Cauchy** a las funciones *f* y *g* en el intervalo $[a,x]$, es decir:
  — f y g son continuas en el intervalo $[a,x]$
  — f y g son derivables en el intervalo (a,x)
  — $g(a) \neq g(x)$
  — $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en un punto de (a,x)
- Por el **teorema de Cauchy** :

$$\exists\, \alpha \in (a,x) \;\Big|\; \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

figura 22



Ahora bien:

$$Como\;\; f(a) = g(a) = 0 \;\; tenemos\;\; que\;\; \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

- Si hacemos que x (ver *figura* 22) tienda a ***a***, es evidente que α también tenderá a ***a***. Tomando el límite cuando $x \to a$ en el miembro de la izquierda y, como consecuencia, cuando $\alpha \to a$ en el miembro de la derecha:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\alpha\to a}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad \text{lógicamente si } x \to a,\ \alpha \to a$$

- Como en el límite coinciden ***a*** , ***α*** y ***x***, podemos poner:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

Expresión que nos permite hallar fácilmente el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$

Observación:

En la práctica la aplicación de la regla de L´Hôpital es como sigue:

‘ Supongamos que buscamos el límite de la función $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \to a$

Obsérvese que $F(x)$ es una función cociente de otras dos.

‘ Supongamos que ocurre lo siguiente:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado}$$

Es decir, al ser $f(a) = g(a) = 0$, nos encontramos con una indeterminación.

‘ Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un entorno del punto ***a***, entonces podemos aplicar la citada regla, es decir:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

‘ Supongamos ahora que $f'(a) = g'(a) = 0$. En este caso:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado}$$

En este caso, si las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$ cumplen las condiciones para aplicar la regla de L´Hôpital (que $f'(x)$ y $g'(x)$ sean derivables en un entorno de ***a***), tenemos:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

‘ Nuevamente, si ocurriese que $f''(a) = g''(a) = 0$, aplicamos la regla :

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{f'''(a)}{g'''(a)}$$

Ejemplo 6.-

Queremos hallar el límite de la función $F(x) = \frac{sen\, x}{x}$ *cuando* $x \to 0$

Veamos:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = \frac{sen\, 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado}$$

Recordemos que la expresión $= \frac{0}{0}$ no es una igualdad numérica.

Como las funciones $f(x) = sen\, x$ y $g(x) = x$ son derivables en todo ú, lo serán en cualquier entorno de 0. Además, se verifica que $f(0) = sen\, 0 = 0$ y $g(0) = 0$, por lo que es posible aplicar la regla de L´Hôpital en este caso:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(sen\, x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1}$$

El significado de este resultado es que para $x = 0$ la función $F(x)$ no existe, pero para valores de x infinitamente próximos a 0, las imágenes de F están infinitamente próximas a 1

Utilizando la calculadora, podemos hacer alguna comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} Para\ \ x = 0'1 \to \ F(0'1) = \frac{sen\, 0'1}{0'1} = 0'99833416\ldots.. \approx 1 \\ Para\ \ x = 0'01 \to \ F(0'01) = \frac{sen\, 0'01}{0'01} = 0'99998333\ldots.. \approx 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 6.-

Estudiar el comportamiento de la función $F(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ en $x = 0$ y sus proximidades.

Solución:

3 Para $x = 0$ tenemos que

$$F(0) = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \notin \mathrm{R}$$

> Para $x = 0$ no existe la imagen de F, es decir, la función F no existe para $x = 0$.
> Quede claro que las igualdades anteriores no son igualdades numéricas, se trata de una forma de deducir que $F(0)$ no existe.

3 Ya sabemos que para $x = 0$ no existe la función F, pero, ¿qué ocurre para valores de x infinitamente próximos a 0?
Para averiguarlo, hallamos el límite de $F(x)$ cuando x tiende a 0

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado}$$

Nótese que las funciones $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = x$ Son derivables en todo ú y, por tanto, lo son en un entorno de 0, por lo que es posible aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 0}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

En definitiva:

$$\boxed{\begin{array}{l} F(0) \text{ no existe} \\ \lim_{x\to 0} F(x) = 1 \end{array}}$$

La imagen de F para $x = 0$ no existe, pero para valores de x infinitamente próximos a 0, las imágenes de esos valores están infinitamente próximos a 1.

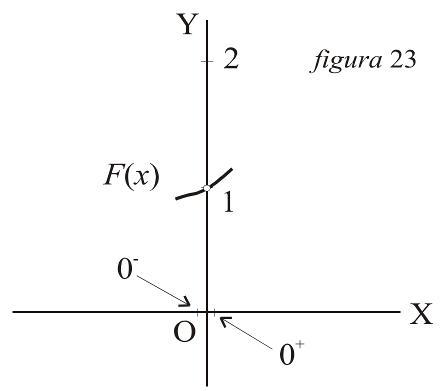


figura 23

Para dar una interpretación gráfica de la función $F(x)$ en las proximidades de $x = 0$, damos un valor del tipo $x = 0^+$ y otro $x = 0$& para comprobar sus imágenes, que estarán próximas a 1.

Utilizando una calculadora, daremos los valores $x = 0´01$ y $x =$ &0´01 y compararemos sus imágenes con el valor 1

$$x = 0'01 \Rightarrow F(0'01) = \frac{e^{0'01} - 1}{0'01} = 1'00501.... = 1^+ > 1$$

$$x = -0'01 \Rightarrow F(-0'01) = \frac{e^{-0'01} - 1}{-0'01} = 0'99501.... = 1^- < 1$$

En la *figura* 23 hemos dado una interpretación gráfica (no se trata de la gráfica exacta) del comportamiento de la función $F(x)$ en $x = 0$ y sus proximidades. Nótese que en $x = 0$ no existe $F(x)$, para valores $x = 0^+$ las imágenes son $F(0^+) = 1^+$ y para $x = 0$& es $F(0$& $) = 1$&

Ejercicio 7.-

Resolver el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{Lx}{x^2+x-2}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{Lx}{x^2+x-2} = \dfrac{L1}{1^2+1-2} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminado $\left(\begin{array}{l}\text{recordemos que las dos últimas}\\ \text{igualdades no son igualdades numéricas}\end{array}\right)$

Veamos si es posible aplicar la regla de L´Hôpital en este caso:

Tenemos $\begin{cases} f(x) = Lx \;\; \textit{funciòn derivable en } (0,+\infty) \\ g(x) = x^2+x-2 \;\; \textit{funciòn derivable en } (-\infty,+\infty) \end{cases}$

Por tanto, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ verifican que $f(1) = g(1) = 0$ y son derivables en un entorno de 1, por lo que es posible aplicar la regla de L´Hôpital :

$$\lim_{x\to 1} \frac{Lx}{x^2+x-2} \underbrace{=}_{derivando} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x+1} = \frac{\frac{1}{1}}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3} = 0'3333.....$$

Conclusión:

$F(x) = \dfrac{Lx}{x^2+x-2}$	Función que no existe para $x=1$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{Lx}{x^2+x-1} = \dfrac{1}{3}$	Para valores de x infinitamente próximos a 1, las imágenes está infinitamente próximas a 0´3333.....

Ejercicio 8.-

Estudiar el comportamiento de la función $H(x) = \dfrac{x - tg\,x}{x^3}$ en $x = 0$ y sus proximidades.

Solución:

- Veamos que ocurre para $x = 0$: $H(0) = \dfrac{0 - tg\,0}{0^3} = \dfrac{0-0}{0} = \dfrac{0}{0} \notin$ R

  Por tanto, para $x = 0$ no existe imagen, es decir, 0 no pertenece al dominio de $H(x)$. Recordemos de nuevo que las igualdades anteriores no expresan igualdades numéricas, sino una forma de llegar a la conclusión de que en 0 no existe la función $H(x)$.
- Ahora estudiaremos el comportamiento de $H(x)$ en las proximidades de $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x - tg\,x}{x^3} = \frac{0 - tg\,0}{0^3} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \;\; \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $f(x) = x\&tg\,x$ y $g(x) = x^3$ cumplen las condiciones para que se aplique la regla de L´Hôpital en $x = 0$ (no olvidar que para aplicar la regla de L´Hôpital, deben cumplirse ciertas condiciones):

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x - tg\,x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} \underbrace{=}_{*} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 0}}{3\cdot 0^2} \underbrace{=}_{*} \frac{1-\frac{1}{1}}{0} \underbrace{=}_{*} \frac{0}{0} \;\; \text{Indeterminado}$$

NOTA: (*) no son igualdades numèricas

O Aplicamos nuevamente L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x - tg\,x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - \frac{-2\cos x \cdot sen\,x}{\cos^4 x}}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\,sen\,x}{\cos^3 x}}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\,sen\,x}{3x\cdot\cos^3 x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{sen\,x}{x}\cdot\frac{1}{\cos^3 x}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{el límite de un producto es} \\ \text{igual al producto de los límites}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{-1}{3}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3 x} == \frac{-1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos^3 0} = \frac{-1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = -\frac{1}{3}$$

NOTA: $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1$ (*ver ejemplo* 6)

Por tanto:

$$H(x) = \frac{x - tg\,x}{x^3}\quad \begin{cases} no\ existe\ para\ x = 0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{x - tg\,x}{x^3} = -\frac{1}{3} = -0'33333....... \end{cases}$$

Como comprobación podemos dar, utilizando una calculadora, el valor $x = 0'01$:

$H(0'01)$= &0´333346....• $-\frac{1}{3}$

Ejercicio 9.-

Resolver $\lim_{x\to 5}\frac{x^3 - 2x^2 - 25x + 50}{x^2 - 2x - 15}$

Solución:

3 Se trata de hallar el límite cuando x tiende a 5 de una función que es cociente de otras dos funciones polinómicas.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3 - 2x^2 - 25x + 50}{x^2 - 2x - 15} = \frac{5^3 - 2\cdot 5^2 - 25\cdot 5 + 50}{5^2 - 2\cdot 5 - 15} = \frac{125 - 50 - 125 + 50}{25 - 10 - 15} = \frac{0}{0}\ \text{Indeterminado}$$

3 Como las funciones $f(x) = x^3 - 2x^2 - 25x + 50$ *y* $g(x) = x^2 - 2x - 15$ verifican que $f(5) = g(5) = 0$ y que son derivables en un entorno de $x = 5$, podemos aplicar la regla de L´Hôpital para resolver el límite:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3 - 2x^2 - 25x + 50}{x^2 - 2x - 15} = \lim_{x\to 5}\frac{(x^3 - 2x^2 - 25x + 50)'}{(x^2 - 2x - 15)'} = \lim_{x\to 5}\frac{3x^2 - 4x - 25}{2x - 2} =$$

$$= \frac{3\cdot 5^2 - 4\cdot 5 - 25}{2\cdot 5 - 2} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3'75$$

NOTA: Recuérdese que este límite también se puede hallar utilizando la regla de Ruffini. En este caso sería:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3 - 2x^2 - 25x + 50}{x^2 - 2x - 15} = \lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)(x-2)}{(x-5)(x+3)} \underset{simplificando}{=} \lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-2)}{x+3} = \frac{10\cdot 3}{8} = \frac{15}{4} = 3'75$$

Ejercicio 10.-

Resolver el límite siguiente: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\, x}{sen\, x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{sen\, x} = \frac{tg\, 0}{sen\, 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado } \left(\begin{array}{l}\text{recordemos que las igualdades}\\ \text{anteriores no son numéricas}\end{array}\right)$$

Fácilmente se debe apreciar la posibilidad de aplicar L´Hôpital para resolver el límite, pero veremos que no es necesario:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\, x}{\cos x}}{sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x \cdot \frac{1}{\cos x}}{sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{sen\, x} = 1}$$

Para valores de x infinitamente próximos 0, el cociente entre la tangente y el seno es un valor infinitamente próximo a 1.
Obsérvese que las funciones $y = tg\, x$ e $y = sen\, x$ son dos infinitésimos en el punto $x = 0$ y además, son dos infinitésimos equivalentes en $x = 0$ (ver tema "***Límites de funciones***" página 30)

Ejercicio 11.-

Estudiar el comportamiento de la función $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ en $x = 1$ y sus proximidades.

Solución:

P Veamos que ocurre para $x = 1$:

$$F(1) = \frac{\sqrt[3]{1} - 1}{\sqrt{1} - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \notin R \quad \left(\begin{array}{l}\text{Insistimos en que las igualdades}\\ \text{anteriores no son igualdades numèricas.}\end{array}\right)$$

Es decir, para $x = 1$ no existe imagen de F.

P Veamos que ocurre en las proximidades de $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt[3]{1} - 1}{\sqrt{1} - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminado}$$

Aplicando la regla de L´Hôpital :

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)'}{\left(\sqrt{x} - 1\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt{1}}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{2}{3} = 0'\widehat{6}$$

Conclusión:

$$\boxed{F(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \left\{\begin{array}{l} no\ existe\ para\ x = 1 \\ F(x) \to \frac{2}{3}\ cuando\ x \to 1 \end{array}\right.}$$

Para comprobar, damos dos valores a x:

$x = 0'999 \to F(0'999) = 0'66672223.... > 0'\widehat{6}$

$x = 1'001 \to F(1'001) = 0'66661113.... < 0'\widehat{6}$

Parece que:

$x = 1^- \to F(1^-) = 0'\widehat{6}^+$

$x = 1^+ \to F(1^+) = 0'\widehat{6}^-$

Ejercicio 12.-

Estudiar el comportamiento de la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ en $x = 0$ y sus proximidades.

Solución:

L Para $x = 0$ tenemos: $f(0)=\dfrac{\sqrt{0}}{0}\notin \mathbb{R}$. Por tanto, $0 \notin D_f$, esto es, en 0 no existe imagen.

L Veamos que ocurre en las proximidades de $x = 0$.

$$\begin{cases} para\ \ x=0^{-}\ \ tenemos\ que\ \ f\left(0^{-}\right)=\dfrac{\sqrt{0^{-}}}{0^{-}}\notin \mathbb{R}\ \ porque\ \sqrt{0^{-}}\notin \mathbb{R} \\ para\ \ x=0^{+}\ \ tenemos\ que\ \ f\left(0^{+}\right)=\dfrac{\sqrt{0^{+}}}{0^{+}}\ \text{Indeterminado} \end{cases}$$

Es decir, a la izquierda de 0 no existe imagen, por lo que debemos hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{0^{+}}}{0^{+}}=\frac{0^{+}}{0^{+}}\quad \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x$ son derivables para valores del tipo 0^+, podemos aplicar la regla de L´Hôpital :

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{0^{+}}}=\frac{1}{2\cdot 0^{+}}=\frac{1}{0^{+}}=+\infty$$

Conclusión:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}\ \begin{cases} no\ existe\ para\ x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)\ \ no\ existe \\ \lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \ no\ existe \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que el eje de ordenadas es una asíntota vertical por la derecha y hacia arriba de la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$, al ocurrir que $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=+\infty$

(Ver tema *"Límites de funciones"*)

Para comprobar la veracidad del resultado, damos un par de valores a x:

$$\begin{cases} para\ \ x=0'01\ \to\ \ f(0'01)=\dfrac{\sqrt{0'01}}{0'01}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{100}}}{\frac{1}{100}}==\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{100}}=\dfrac{100}{10}=10 \\ para\ \ x=0'0001\ \to\ \ f(0'0001)=\dfrac{\sqrt{0'0001}}{0'0001}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{10000}}}{\frac{1}{10000}}==\dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10000}}=\dfrac{10000}{100}=100 \end{cases}$$

Puede apreciarse como "*para valores de x infinitamente próximos a 0 por su derecha, las imágenes son infinitamente grandes positivas*"

La regla de L´Hôpital también puede aplicarse a indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x \to +\infty$ *o* $x \to -\infty$ y a indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 7.-

Queremos resolver el límite siguiente: $\lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x}$

Veamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x} = \frac{L(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminado}$$

Hemos llegado a una indeterminación.

NOTA: A simple vista debería apreciarse que este límite es igual a 0.

Considerando que las funciones numerador y denominador son derivables para valores $x = +4$, podemos aplicar la regla de L´Hôpital en este caso:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(L\,x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \;\left(0^+\right)$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x}{x} = 0 \;\left(0^+\right)$$

Significa que "*para valores de x infinitamente grandes positivos, las imágenes están infinitamente próximas a* 0*, pero son mayores que* 0"

Gráficamente, nos indica que el eje de abcisas es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$ por la derecha, yendo la gráfica de la función por encima de la asíntota.

Ejercicio 13.-

Estudiar el comportamiento de la función $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ en el infinito.

Solución:

Se trata de hallar los siguientes límites: $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} f(x) \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{e^{-\infty}}{(-\infty)^3} = \frac{\frac{1}{e^{+\infty}}}{-\infty^3} = \frac{0^+}{-\infty} = 0 \;\left(0^-\right)$$

Obsérvese que al resolver este límite no nos ha salido una indeterminación y no ha sido necesario aplicar la regla de L´Hôpital.

Resolvamos el otro límite:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{e^{+\infty}}{(+\infty)^3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $y = e^x$ e $y = x^3$ son derivables en todo ú, podemos aplicar la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \frac{e^{+\infty}}{3(+\infty)^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

Volvemos a aplicar L´Hôpital :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{\left(3x^2\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x} = \frac{e^{+\infty}}{6\cdot(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

Volvemos a aplicar L´Hôpital :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{(6x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6} = \frac{e^{+\infty}}{6} = \frac{+\infty}{6} = +\infty$$

Conclusión:

$$\boxed{f(x) = \frac{e^x}{x^3} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \ \left(0^-\right) \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}}$$

La interpretación gráfica de los resultados obtenidos es que el eje de abcisas es una asíntota horizontal por la izquierda que está por encima de la gráfica de la función. Por la derecha la función tiene una rama parabólica hacia arriba (ver tema "*Límites de funciones*")

La regla de L´Hôpital también puede aplicarse a indeterminaciones de la forma $0\cdot\infty$
Veamos como resolver este caso:

W Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones.

W Sea a0ú tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *o* $-\infty$

W Buscamos el límite de la función producto $H(x) = f(x)\cdot g(x)$ cuando $x \to a$

W Recordando que el límite de un producto es igual al producto de los límites:

$$\lim_{x\to a} H(x) = \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = 0\cdot\infty \quad \text{Indeterminado}$$

W Veamos el modo de salvar esta indeterminación:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \underbrace{=}_{\substack{\text{como el limite de un}\\ \text{cociente es el cociente}\\ \text{de los limites}}} \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminado}$$

Esta indeterminación $\frac{0}{0}$ la resolvemos como hemos hecho anteriormente.

También podemos actuar de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\underbrace{=}_{\substack{\text{como el límite de un}\\ \text{cociente es el cociente}\\ \text{de los limites}}}\frac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}}=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{Indeterminado}$$

Nótese que ahora la indeterminación es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que resolveríamos como hicimos anteriormente.

Ejemplo 8.-

Queremos hallar $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$

Veamos:

En este caso conviene hallar los límites laterales en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = 0^+\cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0^+\cdot e^{+\infty} = 0^+\cdot(+\infty)\ \text{Indeterminado}$$

$$\lim_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0^-\cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0^-\cdot e^{-\infty} = 0^-\cdot\frac{1}{e^{+\infty}} = 0^-\cdot 0^+ = 0\ \left(0^-\right)$$

Debemos hallar el limite cuando $x\to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{0^+}}}{\frac{1}{0^+}} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}\ \text{Indeterminado}$$

Resolviendo por L`Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Por tanto:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0\ \left(0^-\right)\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}\ \textit{no existe}}$$

Para comprobarlo damos algunos valores a x :

$$x=-0'01\to\ -0'01\cdot e^{\frac{1}{-0'001}} = \frac{-0'01}{e^{\frac{1}{0'001}}} = \frac{-0'01}{e^{100}} = 0^-$$

$$x = 0'01\to\ 0'01\cdot e^{\frac{1}{0'01}} = 0'01\cdot e^{100} = \frac{e^{100}}{100} = \left(\begin{array}{l}\text{numero infinitamente}\\ \text{grande positivo}\end{array}\right)$$

Hagamos una interpretación gráfica de los resultados obtenidos:

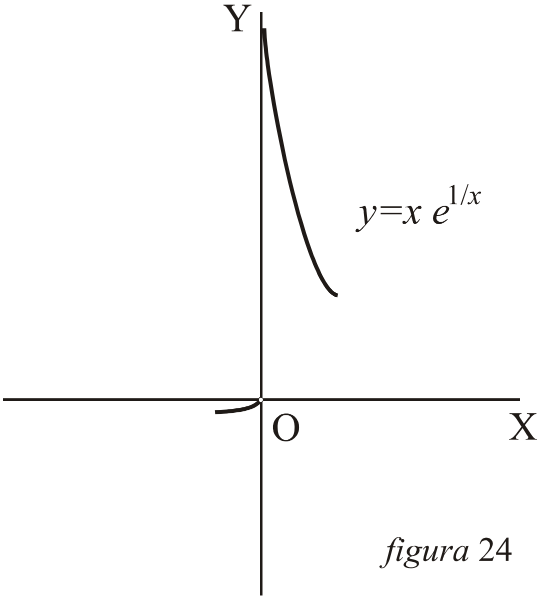


figura 24

La *figura* 24 nos da una idea aproximada de como se comporta la función $y = x\,e^{\frac{1}{x}}$ en las proximidades de $x = 0$ (quede claro que no se trata de la gráfica exacta).
Se aprecia que para $x = 0$ no existe imagen, pero para valores de x infinitamente próximos a 0 por su izquierda, las imágenes están infinitamente próximas a 0 (por debajo de 0), mientras que por la derecha de $x = 0$ tenemos una asíntota vertical hacia arriba, esto es, $y \to +\infty \quad cuando \ x \to 0^+$

Ejercicio 14.-

Hallar el límite de la función $h(x) = \left(x^2 - 1\right)\cdot tg\,\dfrac{\pi\, x}{2}$ cuando $x \to 1^+$

Solución:

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2 - 1\right) tg\,\frac{\pi\, x}{2} = \left(1^{+\,2} - 1\right) tg\,\frac{\pi\cdot 1^+}{2} = 0^+ \cdot tg\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = 0^+ \cdot (-\infty) \ \text{ Indeterminado}$$

NOTA:

Recuérdese que $\begin{cases} Para \ \ x = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+ \ \ es \ \ tg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+ = -\infty \\ Para \ \ x = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^- \ \ es \ \ tg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^- = +\infty \end{cases}$

Ver los conceptos "*valores borrosos*" e "*imágenes borrosas de valores borrosos"* del tema "***Funciones reales de variable real***", página 33.

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2 - 1\right) tg\,\frac{\pi\, x}{2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{\frac{1}{tg\,\frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{\text{cotg}\,\frac{\pi\, x}{2}} = \frac{1^{+\,2} - 1}{\text{cotg}\,\frac{\pi\cdot 1^+}{2}} = \frac{0^+}{\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} = \frac{0^+}{0^-} \ \text{ Indeter.}$$

Ahora tenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ que podemos resolver por L´Hôpital (obsérvese que el límite, caso de existir, será negativo):

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{\text{cotg}\,\frac{\pi\, x}{2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(x^2 - 1\right)'}{\left(\text{cotg}\,\frac{\pi\, x}{2}\right)'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{sen^2\,\frac{\pi x}{2}}} = \frac{2\cdot 1}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{sen^2\,\frac{\pi}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{1^2}} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \left(x^2 - 1\right)\cdot tg\,\frac{\pi\, x}{2} = -\frac{4}{\pi} = -1'27323954....}$$

8.La indeterminación 0^0.-

Veremos otro tipo de indeterminación que también puede resolverse aplicando la regla de L´Hôpital.

º Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. Sea ***a*** un número real, es decir, a0ú

º Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \;\; y \;\; \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

º Consideremos la función $H(x) = f(x)^{g(x)}$

º Queremos hallar $\lim\limits_{x \to a} H(x)$

Veamos:

$$\lim_{x \to a} H(x) = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = 0^0 \quad \text{Indeterminado}$$

Nos encontramos con una indeterminación del tipo 0^0

Veamos el modo de salvar esta indeterminación:

. Llamamos A al límite buscado, es decir: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$

. Tomamos logaritmos neperianos:

$$L\,A = L\left[\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}\right] \underbrace{=}_{(*)} \lim_{x \to a} L\,f(x)^{g(x)} \underbrace{=}_{(**)} \lim_{x \to a} g(x)\; L\,f(x) \underbrace{=}_{(***)} \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} L\,f(x) =$$

$$= 0 \cdot L \lim_{x \to a} f(x) = 0 \cdot L\,0 = 0 \cdot (-\infty) \quad \text{Indeterminado}$$

NOTAS:

(*) ² Puede demostrarse que "*el logaritmo de un límite es igual al límite del logaritmo*"

(**) ² Recuerda que "*el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base*"

(***) ² Recuerda que "*el límite de un producto es el producto de los límites*"

Nos encontramos con una indeterminación del tipo &0· 4 que puede resolverse del modo visto anteriormente.

Ejemplo 9.-

Queremos estudiar el comportamiento de la función $H(x) = x^x$ en $x = 0$ y en las proximidades de 0 por la derecha.

Veamos:

L *Para* $x = 0$ *es* $H(0) = 0^0 \notin \mathbb{R}$. Por tanto, 0óD_H

L Estudiemos el límite cuando $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} H(x) = \lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0 \quad \text{Indeterminado}$$

Para resolver la indeterminación, utilizamos la técnica explicada anteriormente:

Llamamos $A = \lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

Tomamos logaritmo neperiano:

$$LA = L \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} Lx^x = \lim_{x\to 0^+} x\,Lx = 0 \cdot L\,0 = 0\cdot(-\infty) = -0\cdot\infty \quad \text{Indeterminado}$$

Nos encontramos con una indeterminación del tipo 0 · 4 que resolvemos:

$$LA = \lim_{x\to 0^+} x\,Lx \underbrace{=}_{(*)} \lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{L\,0^+}{\frac{1}{0^+}} = \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

NOTA:

(*) ² Aquí puede apreciarse el motivo de interesarnos por el límite a la derecha de 0, ya que los $L0^+$ existen, pero $L0^{\&}$ no existen.

Ahora nos encontramos con una indeterminación del tipo 4/4 que resolvemos aplicando la regla de L´Hôpital:

$$LA = \lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(L\,x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \quad (0^-)$$

Por tanto:

$$L\,\text{A} = 0 \Rightarrow e^0 = \text{A} \Rightarrow \text{A} = 1$$

Conclusión:

$$H(x) = x^x \quad \begin{cases} H(0) \ \ \textit{no existe} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} H(x) = 1 \end{cases}$$

Hagamos alguna comprobación utilizando una calculadora:

$$x = 0'001 \to H(0'001) = 0'001^{0'001} = 0'99311604....$$

$$x = -0'001 \to H(-0'001) = (-0'001)^{-0'001} = \textit{ERROR}$$

Ejercicio 15.-

Resolver $\lim\limits_{x\to 0} (sen\,x)^{sen\,x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} (sen\,x)^{sen\,x} = \left(\lim_{x\to 0} sen\,x\right)^{\lim\limits_{x\to 0} sen\,x} = 0^0 \quad \text{Indeterminado}$$

Resolvemos:

Llamamos $\text{A} = \lim\limits_{x\to 0} (sen\,x)^{sen\,x}$

Tomamos logaritmo: $L\text{A} = L \lim\limits_{x\to 0} (sen\,x)^{sen\,x} = \lim\limits_{x\to 0} L(sen\,x)^{sen\,x} = \lim\limits_{x\to 0} sen\,x\ L\,sen\,x =$

$$= sen\,0 \cdot L\,sen\,0 = 0\cdot(-\infty) = -\,0\cdot\infty \quad \text{Indeterminado}$$

Salvamos la nueva indeterminación:

$$L\text{A} = \lim_{x\to 0} sen\,x\ L\,sen\,x \underbrace{=}_{(*)} \lim_{x\to 0} \frac{L\,sen\,x}{\frac{1}{sen\,x}} = \frac{L\,sen\,0}{\frac{1}{sen\,0}} = \frac{L\,0}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

NOTA:

(*) ² Nótese que es obligado que $x \to 0^+$ ya que en el caso $x \to 0^-$ sería $L\ sen\ 0^{\&} = L\ 0^{\&}$óú
Aplicamos la regla de L´Hôpital :

$$LA = \lim_{x\to 0} \frac{L\,sen\,x}{\frac{1}{sen\,x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(L\,sen\,x\right)'}{\left(\frac{1}{sen\,x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{sen\,x}\cdot\cos x}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{-1}{sen\,x}} = \lim_{x\to 0}(-sen\,x) = -\,sen\,0 = 0$$

Por tanto:

$$L\,A = 0 \Rightarrow e^0 = A \Rightarrow A = 1$$

Conclusión:

$$\lim_{x\to 0}\left(sen\,x\right)^{sen\,x} = 1$$

$$Para\ ser\ más\ exacto: \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(sen\,x\right)^{sen\,x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(sen\,x\right)^{sen\,x}\ no\ existe \end{cases}$$

Podemos comprobar utilizando una calculadora:

$x = 0'001\ radianes$

$\left(sen\,0'001\right)^{sen\,0'001} = 0'99311604....$

$x = -0'001\ radianes$

$\left(sen\,(-0'001)\right)^{sen\,(-0'001)} = ERROR$

9.La indeterminación 1^4.-

Por el mismo método que para la indeterminación 0^0 se resuelve la 1^4. Lo veremos de un modo práctico, con un ejemplo y un ejercicio:

Ejemplo 10.-

Queremos resolver el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Veamos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\cos 0\right)^{\frac{1}{0^2}} = 1^{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

Llamamos $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Tomamos logaritmo: $L\,A = L\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} L\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\,L\cos x =$

$$= \frac{1}{0^2}\,L\cos 0 = +\infty\cdot L1 = +\infty\cdot 0 \quad \text{Indeterminado}$$

Salvamos esta indeterminación:

$$L\,A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\,L\cos x = \lim_{x\to 0}\frac{L\cos x}{x^2} = \frac{L\cos 0}{0^2} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminado}$$

NOTA: Recordemos nuevamente que las últimas igualdades de la expresión anterior no son igualdades numéricas, sino una forma de expresar la indeterminación.

Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$L\,A = \lim_{x\to 0} \frac{L\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(L\cos x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{\cos x}\,sen\,x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\,sen\,x}{2x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{sen\,x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{-1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \underbrace{=}_{(*)} \frac{-1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = \frac{-1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \frac{-1}{2} = -\,0'5$$

Por tanto:

$$L\,A = -\,\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; A = e^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{e^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{e}} = 0'60653065.....$$

Conclusión:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e} = 0'6053065....}$$

Hagamos una comprobación:
(no olvidar poner la calculadora en radianes)
para $x = 0'001$ tenemos:

$$\left(\cos 0'001\right)^{\frac{1}{0'000001}} = \left(\cos 0'001\right)^{1000000} =$$
$$= 0'60653058.....\approx\sqrt{e^{-1}}$$

Ejercicio 16.-

Calcular $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(1+2\,\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(1+2\,\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \left(1+2\,\cos\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}} = \left(1+2\cdot 0\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

NOTA: Recordemos que las últimas igualdades no son igualdades numéricas, sino una forma de llegar a la indeterminación.

Llamamos $A = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(1+2\,\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Tomamos logaritmo:

$$L A = L\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(1+2\,\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} L\left(1+2\,\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\;L\left(1+2\,\cos x\right) =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{L\left(1+2\,\cos x\right)}{\cos x} = \frac{L\left(1+2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{L\,(1+2\cdot 0)}{0} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminado}$$

Aplicamos L´Hôpital

$$L\,A = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{L\left(1+2\cos x\right)}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\left[L\left(1+2\cos x\right)\right]'}{\left(\cos x\right)'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-2\;sen\,x}{1+2\;\cos x}}{-\,sen\,x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2}{1+2\,\cos x} = \frac{2}{1+2\,\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

Por tanto: $L\,A = 2 \Rightarrow A = e^2 = 7'38905609....$

Conclusión:

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^2 = 7'38905609....}$$

10.La indeterminación 4^0.-

Por el mismo método que para las indeterminaciones 0^0 y 1^4 se resuelven las del tipo 4^0. Lo veremos de un modo práctico, con dos ejercicios:

Ejercicio 17.-

Estudiar el comportamiento de la función $f(x)=\left(x+e^x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en +4

Solución:

Se trata de hallar el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a +4

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+e^x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(+\infty+e^{+\infty}+e^{+2\infty}\right)^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty^{0^+} \quad \text{Indeterminado}$$

Salvamos la indeterminación:

$$\textit{llamamos}\quad \mathrm{A}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+e^x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Tomamos logaritmo neperiano:

$$L\mathrm{A}=L\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} L\left(x+e^x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}L\left(x+e^x+e^{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{L\left(x+e^x+e^{2x}\right)}{x}=$$

$$=\frac{L\left(+\infty+e^{+\infty}+e^{+2\infty}\right)}{+\infty}=\frac{L(+\infty)}{+\infty}=\frac{+\infty}{+\infty}\quad \text{Indeterminado}$$

Hemos llegado a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos por la regla de L´Hôpital:

$$L\mathrm{A}=L\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{L\left(x+e^x+e^{2x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[L\left(x+e^x+e^{2x}\right)\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+e^x+2e^{2x}}{x+e^x+e^{2x}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x+2e^{2x}}{x+e^x+e^{2x}}=\frac{1+e^{+\infty}+2e^{+2\infty}}{+\infty+e^{+\infty}+e^{+2\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}\quad \text{Indeterminado}$$

Volvemos a aplicar L´Hôpital :

$$L\mathrm{A}=L\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x+2e^{2x}}{x+e^x+e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+e^x+2e^{2x}\right)'}{\left(x+e^x+e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+4e^{2x}}{1+e^x+2e^{2x}}=\frac{e^{+\infty}+4e^{+2\infty}}{1+e^{+\infty}+2e^{+2\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

nos vuelve a salir otra indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Volvemos a aplicar L´Hôpital :

$$L\mathrm{A} = L \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 4e^{2x}}{1+e^x+2e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x+4e^{2x}\right)'}{\left(1+e^x+2e^{2x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+8e^{2x}}{e^x+4e^{2x}} = \frac{e^{+\infty}+8e^{+2\infty}}{e^{+\infty}+4e^{+2\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Observamos que si aplicamos nuevamente la regla de L´Hôpital, vuelve a salir la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que deducimos que el método que empleamos no es el adecuado. Veamos otro método para resolver el límite:

Hemos llegado a que $L\mathrm{A} = L \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+8e^{2x}}{e^x+4e^{2x}}$

Vamos a dividir numerador y denominador por e^{2x} :

$$L\mathrm{A} = L \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+8e^{2x}}{e^x+4e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+8e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{e^x+4e^{2x}}{e^{2x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^{2x}}+\frac{8e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{e^x}{e^{2x}}+\frac{4e^{2x}}{e^{2x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x\cdot e^x}+8}{\frac{e^x}{e^x\cdot e^x}+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^x}+8}{\frac{1}{e^x}+4} = \frac{\frac{1}{e^{+\infty}}+8}{\frac{1}{e^{+\infty}}+4} = \frac{\frac{1}{+\infty}+8}{\frac{1}{+\infty}+4} = \frac{0+8}{0+4} = \frac{8}{4} = 2$$

Por tanto:

$$L\mathrm{A} = 2 \Rightarrow \mathrm{A} = e^2 = 7'38905609....$$

Conclusión:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x+e^x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2 = 7'38905609....}$$

Gráficamente se interpreta como que la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal por la derecha. La asíntota es la recta de ecuación $y = e^2$

Para tener una idea sobre la posición relativa de la asíntota y la función, damos un valor relativamente grande positivo a x

$$x = 100 \Rightarrow f(100) = \left(100+e^{100}+e^{200}\right)^{0'01} = 7'38905609.....$$

Ejercicio 18.-

Calcular $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \left(\frac{1}{0^+}\right)^{sen\,0^+} = (+\infty)^{0^+} \quad \text{Indeterminado}$$

Llamamos $\mathrm{A} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}$

Para resolver la indeterminación tomamos logaritmo en ambos lados de la igualdad:

$$L\,A = L\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \lim_{x\to 0^+} L\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \lim_{x\to 0^+} sen\,x\cdot L\frac{1}{x} = sen\,0^+\cdot L\frac{1}{0^+} =$$

$$= 0^+\cdot L(+\infty) = 0^+\cdot(+\infty) \quad \text{Indeterminado}$$

Convertimos esta indeterminación en una del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$L\,A = L\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \lim_{x\to 0^+} sen\,x\cdot L\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{L\frac{1}{x}}{\frac{1}{sen\,x}} = \frac{L\frac{1}{0^+}}{\frac{1}{sen\,0^+}} = \frac{L(+\infty)}{\frac{1}{0^+}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{Indeterminado}$$

Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$L\,A = L\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{L\frac{1}{x}}{\frac{1}{sen\,x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(L\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{sen\,x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} = = \lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{sen\,x}{x}\cdot\frac{sen\,x}{\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x}{\cos x} \underbrace{=}_{ver\ ejemplo\ 6} 1\cdot\frac{sen\,0^+}{\cos 0^+} = 1\cdot\frac{0}{1} = 0$$

Por tanto:

$$L\,A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$

Conclusión:

$$\boxed{A = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = 1}$$

Significa que "*para valores de x infinitamente próximos a* 0 *por su derecha, los valores* $\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}$ *están infinitamente próximos a* 1".

Hagamos una comprobación utilizando la calculadora:

$$x = 0'001 \Rightarrow \left(\frac{1}{0'001}\right)^{sen\,0'001} \approx 1000^{0'0009999998333} = 1'00693166.... \approx 1$$

11.Derivación logarítmica.-

En este nivel hay que suponer que el alumno conoce las técnicas de derivación mas usuales, pero conviene conocer la denominada "*derivación logarítmica*" que permite hallar la función derivada de algunas funciones menos usuales.

Veamos su funcionamiento:

- Sea $y = f(x)$ una función cuya derivada $f'(x)$ buscamos.
- Supongamos por las técnicas que conocemos no sabemos hallar $f'(x)$
- Consideramos la función $z = L\,y = L\,f(x)$
- Derivando z con respecto a x tenemos: $z' = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{f(x)}f'(x)$
- Despejando:

$$\boxed{f'(x) = f(x)\cdot z'}$$

Nótese que al tomar $z = L\,f(x)$, obligamos a que $f(x)$ sea positivo, por lo que la técnica es válida solo en los casos en que $f(x) > 0$

Ejemplo 11.-

Sea la función $y = f(x) = x^x$

Queremos hallar su función derivada $f'(x)$

Veamos:

W Llamamos $z = L\,y = L\,f(x)$

Por tanto $z = L\,x^x = x\,L\,x$

W Derivando la función z como función logaritmo de otra función:

$$z' = \left(L\,f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{x^x}$$

$$Despejando\!: \ f'(x) = x^x \cdot z' \quad (*)$$

W Ahora bien: $z = L\,x^x = x\,L\,x$

Por lo que $z' = \left(x\,Lx\right)' \underbrace{=}_{\substack{derivada\ de \\ un\ producto}} 1\cdot Lx + x\cdot\frac{1}{x} = L\,x + 1$

W Substituyendo en (*) :

$$f'(x) = x^x\cdot(L\,x + 1)$$

Conclusión:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^x \\ f'(x) = x^x\left(Lx + 1\right)\end{array}}$$

Por ejemplo:

$$Para\ \ x = 5\ \ es \begin{cases} f(5) = 5^5 = 3125 \\ f'(5) = 3125\cdot\ L6 \end{cases}$$

Notese que es válido para valores $x>0$

Ejercicio 19.-

Hallar la derivada de la función $f(x) = x^{sen\,x}$

Solución:

Por la técnica de derivación logarítmica:

Llamamos $z = L\,f(x) = L\,x^{sen\,x} = sen\,x\cdot\ L\,x$

Derivando z : $z' = \left(L\,f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

Despejando : $f'(x) = f(x)\cdot z' \quad$ (*)

Pero $z' = \left(sen\,x\cdot\ L\,x\right)' = \cos x\cdot\ L\,x + sen\,x\cdot\frac{1}{x}$

Substituyendo en (*) : $f'(x) = f(x)\cdot z' = x^{sen\,x}\left(\cos x \cdot Lx + \dfrac{sen\,x}{x}\right)$

Conclusión:

$$f(x) = x^{sen\,x}$$
$$f'(x) = x^{sen\,x}\left(\cos x \cdot Lx + \frac{sen\,x}{x}\right) = x^{sen\,x}\left(L\,x^{\cos x} + \frac{sen\,x}{x}\right)$$

Ejercicio 20.-

Hallar por el método de derivación logarítmica la derivada de la función $g(x) = 5^x$

Solución:

Buscamos $g'(x)$

Llamamos $z = L\,g(x) = L5^x = x\,L5$

Derivando z : $z' = \left(L\,g(x)\right)' = \dfrac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$

Despejando : $g'(x) = g(x)\cdot z' = 5^x \cdot z'$ (*)

Pero $z' = \left(x\,L5\right)' = L5$ (no olvidar que $L5$ es una constante)

Substituyendo en (*) : $g'(x) = 5^x\,L5$

Conclusión:

$$g(x) = 5^x$$
$$g'(x) = 5^x\,L5$$

Recuérdese que en cursos anteriores vimos que la derivada de la función exponencial $g(x) = a^x$ $(a > 0)$ *era* $g'(x) = a^x\,La$

Ejercicio 21.-

Hallar la derivada de la función $y = \left(sen\,x\right)^{\cos x}$

Solución:

Utilizamos el método de derivación logarítmica.

Buscamos y'

Llamamos $z = L\,y = L\left(sen\,x\right)^{\cos x} = \cos x \cdot L\,sen\,x$

Derivando z : $z' = \left(L\,y\right)' = \dfrac{1}{y}\,y'$

Despejando : $y' = y\cdot z' = \left(sen\,x\right)^{\cos x}\cdot z'$ (*)

Ahora bien:

$$z' = \left(\cos x \cdot L\,sen\,x\right)' = -\,sen\,x\cdot L\,sen\,x + \cos x\cdot\frac{\cos x}{sen\,x} = -\,sen\,x\cdot L\,sen\,x + \frac{\cos^2 x}{sen\,x}$$

Substituyendo en (*) : $y' = \left(sen\,x\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{sen\,x} - sen\,x \cdot\ L\,sen\,x \right)$

Conclusión:

$$y = \left(sen\,x\right)^{\cos x}$$

$$y' = \left(sen\,x\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{sen\,x} - sen\,x \cdot\ L\,sen\,x \right) = \left(sen\,x\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{sen\,x} - \ L\,(sen\,x)^{\ sen\,x} \right)$$

Ejercicio 22.-

La función $f\,(x) = \ x^{\sqrt{x}}$ está definida cuando $x > 0$.

Hallar el valor de su derivada para $x = 1$

Solución:

Buscamos $f\,'(1)$

Necesitamos conocer $f\,'(x)$

Empleamos la técnica de derivación logarítmica:

$$z = \ L\,f\,(x) = L\,x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ \ L\,x$$

$$z' = \left(L\,f\,(x)\right)' = \frac{1}{f\,(x)} \cdot f\,'\,(x)$$

$$f\,'\,(x) = f\,(x) \cdot z'$$

$$z' = \left(\sqrt{x}\ \ L\,x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,L\,x + \ \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{L\,x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Por tanto : $f\,'\,(x) = f\,(x) \cdot z' = \ x^{\sqrt{x}} \left(\frac{L\,x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L\,x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{L\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$

Conclusión:

$$f\,(x) = x^{\sqrt{x}}$$

$$f\,'\,(x) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{L\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$$

$$f\,'\,(1) = 1$$

Para $x = 1$ tenemos:

$$f\,'\,(1) = 1^{\sqrt{1}} \cdot \left(\frac{L\,\sqrt{1}}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{1}}{1} \right) = 1 \cdot \left(\frac{L\,1}{1} + \frac{1}{1} \right) =$$

$$= 1 \cdot \left(0 + 1\right) = 1 \cdot 1 = 1$$