UNIDAD 16: Distribuciones continuas. Distribución normal

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 404

1. Los jugadores de un determinado equipo de voleibol se clasifican, por alturas, según la siguiente tabla:

Altura	[1,65; 1,70)	[1,70 ; 1,75)	[1,75; 1,80)	[1,80; 1,85)	[1,85; 1,90]
Nº jugadores	10	12	36	16	6

Halla el número de jugadores que se encuentran en los intervalos (μ – σ, μ + σ) , (μ – 2σ, μ + 2σ) y (μ –3 σ, μ + 3σ).

La media y la desviación típica de la distribución vale: $\mu = 1{,}779 \ y \ \sigma = 0{,}054$.

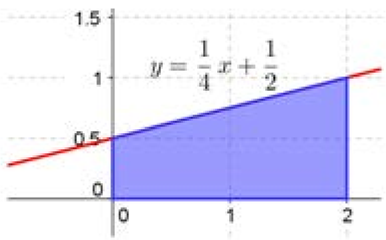
En $(\mu - \sigma, \ \mu + \sigma) = (1{,}719; \ 1{,}827)$ hay 53 jugadores, es decir, el 66,25%.

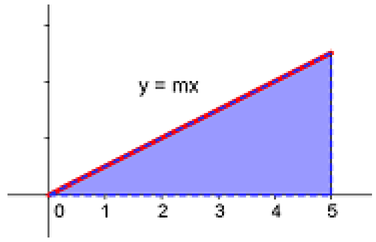
En $(\mu - 2\sigma, \ \mu + 2\sigma) = (1{,}665; \ 1{,}881)$ hay 74 jugadores, es decir, el 92,5%.

En $(\mu - 3\sigma, \ \mu + 3\sigma) = (1{,}611; \ 1{,}935)$ hay 80 jugadores, es decir, el 100%.

Esta distribución tiene un comportamiento "normal".

2. Calcula el área del recinto sombreado en la primera figura y en la segunda calcula el valor de m para que el área sombreada valga una unidad cuadrada.



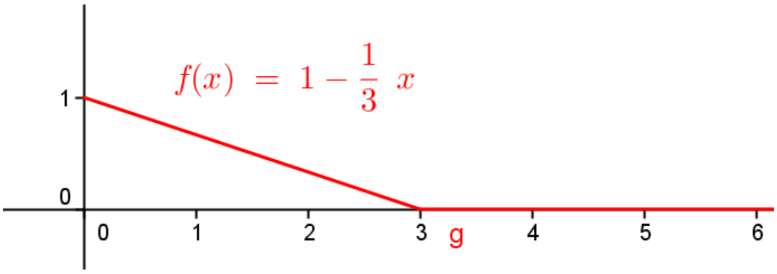


En el primer caso el área mide 1,5 unidades cuadradas. En la segunda figura $m = \frac{2}{25}$

3. Representa gráficamente la función f (x) y halla el área del recinto limitado por la gráfica de f (x), el eje OX y las rectas x = 2/3 y x = 7/2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}x & si \ \ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & si \ \ x > 3 \end{cases}$$

La representación gráfica es:



El área del recinto señalado es:

$$\int_{2/3}^{3} \left(1 - \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{49}{54} = 0{,}9074 \ uc.$$

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 419

1. Negativo y positivo. Analiza la última falacia y encuentra el error que nos lleva a al igualdad – 1 = 1.

El error cometido está en el paso:

2 cos 21º · cos 90º = 2 cos 90º · cos (- 30º) ⇔ cos 210º = cos 30º.

Simplificamos o dividimos por cos 90º = 0. Esta simplificación nos puede conducir a cualquier resultado, ya que:

Si a · 0 = b · 0 y simplificamos por 0, entonces a = b.

2. El mismo número. Analiza el razonamiento siguiente para demostrar: «todos los números son el mismo número» y encuentra el error:

$$a \neq b \Leftrightarrow a + b = t \Leftrightarrow (a + b) \cdot (a - b) = t \cdot (a - b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = ta - tb \Leftrightarrow a^2 - ta = b^2 - tb \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ta + \frac{t^2}{4} = b^2 - tb + \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{a} = b - \frac{t}{2} \Leftrightarrow a = b$$

En este caso el error lo cometemos en el paso:

$$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{a} = b - \frac{t}{2}$$

La raíz cuadrada de una expresión tiene dos raíces, opuestas, y tomamos la que nos conviene para crear el error.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 421

1. Calcula las probabilidades siguientes para una variable X que es binomial de parámetros n = 8 y p = 0,8.

a) P (X = 3) **b) P (X > 6)** **c) P (X ≤ 2)** **d) P (2 < X < 6)**

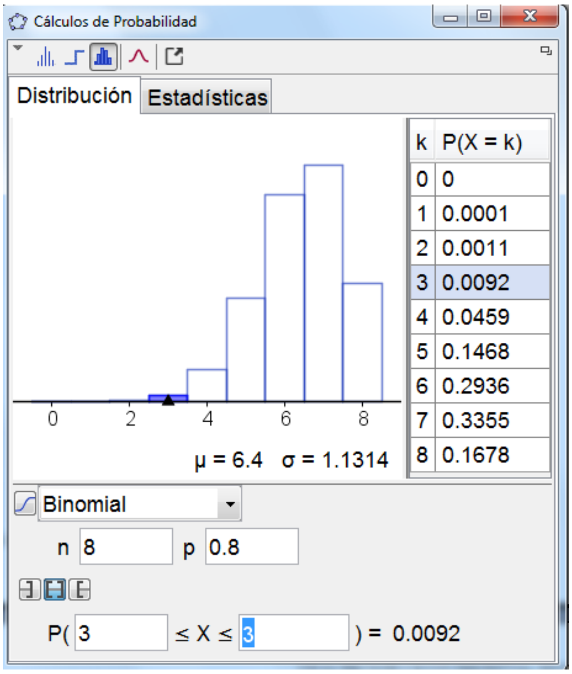
Las probabilidades pedidas son:

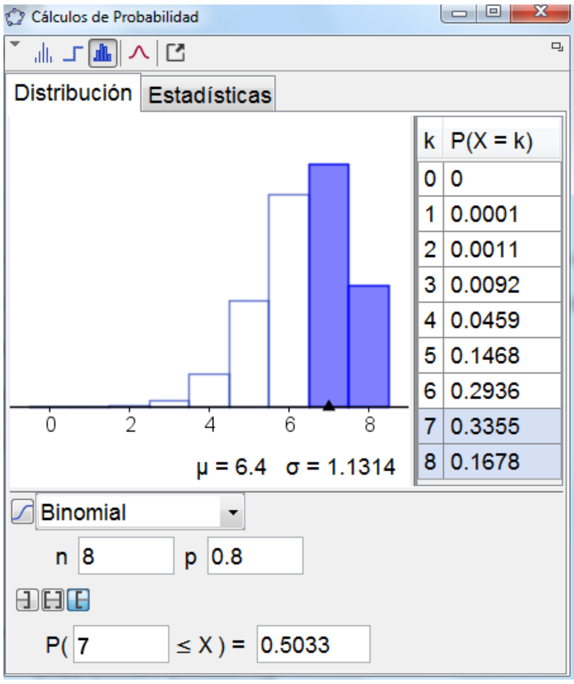
a) P (X = 3) $= \binom{8}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}0092$

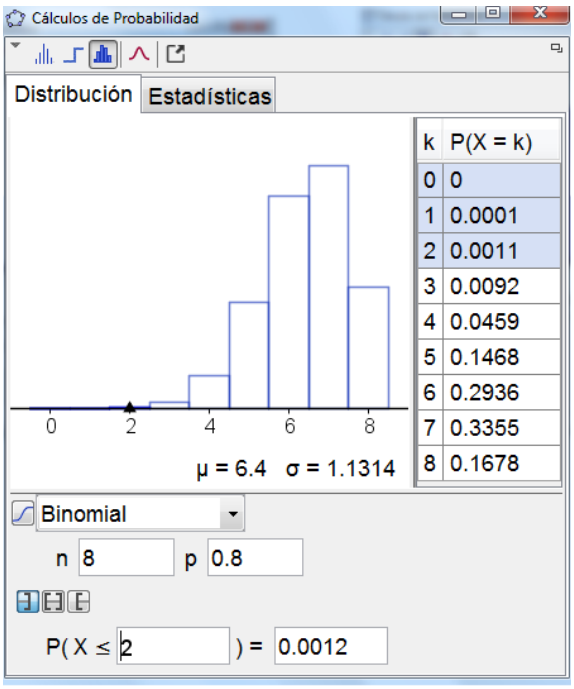
b) P (X > 6) = P (X = 7) + P (X = 8) = $\binom{8}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^1 + \binom{8}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}5033$

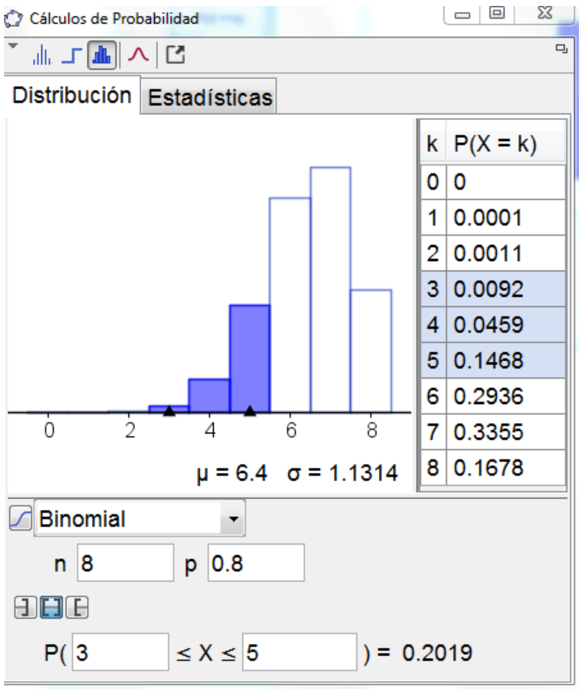
c) P (X ≤ 2) = P (X = 0) + P (X = 1) + P (X = 2) = 0,0000 03 + 0,0000 82 + 0,0011 47 = 0,0012

d) P (2 < X < 6) = P (X = 3) + P (X = 4) + P (X = 5) = 0,0092 + 0,0459 + 0,1468 = 0,2019
Todas las probabilidades anteriores pueden verse en las imágenes que siguen.







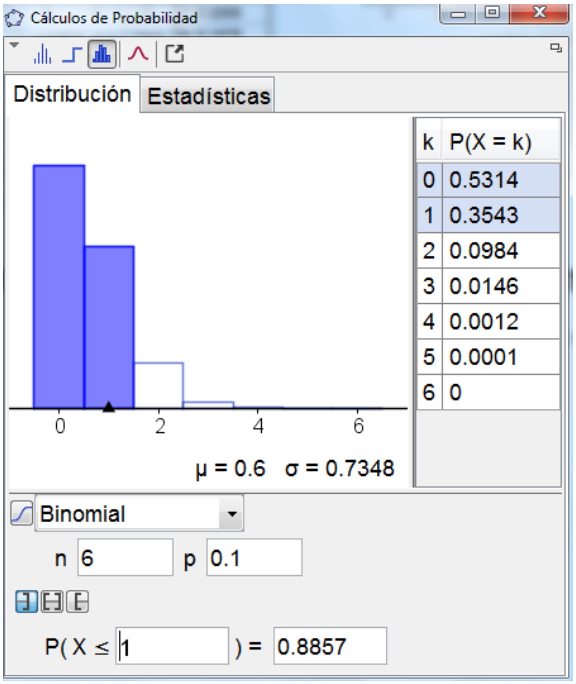


2. El 10% de los huevos de un supermercado están rotos. Halla la probabilidad de que un cliente que compra media docena de huevos encuentre como mucho un huevo roto.

Los huevos rotos siguen una distribución B (6; 0,1).

La probabilidad pedida es:

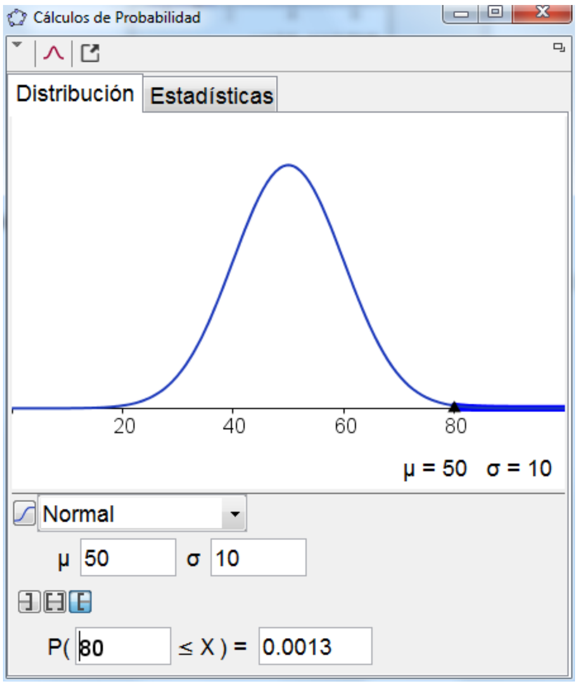
P (como mucho uno roto) = P (X = 0) + P (X = 1) = 0,5314 + 0,3543 = 0,8857.



3. Sea X una variable que sigue una distribución normal de media μ = 50 y desviación típica σ = 10. Calcula al probabilidad P (X ≥ 80).

La probabilidad pedida es:

$$P\,(X \geq 80) = P\left(z = \frac{X-50}{10} \geq \frac{80-50}{10}\right) = P\,(z \geq 3) = 1 - P\,(z < 3) =$$
$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

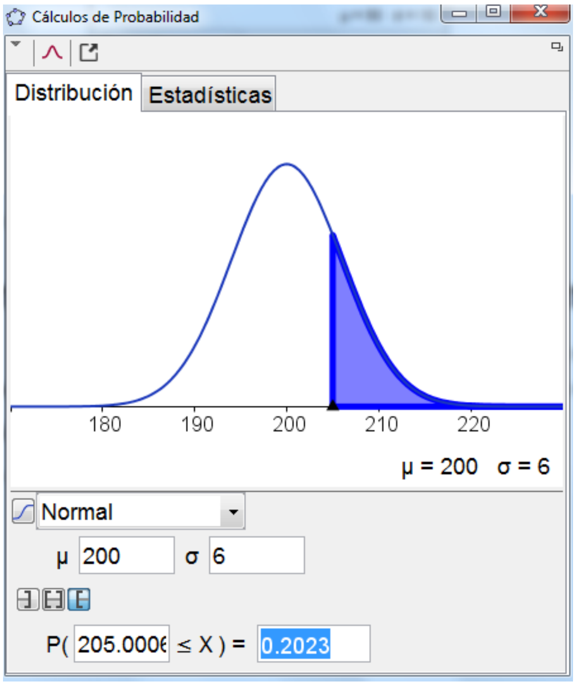


4. Una máquina que expende refrescos está regulada de tal manera que descarga una media de 200 cm^3 por vaso, con una desviación típica de 6 cm^3. ¿Qué porcentaje de vasos llenará con más de 205 cm^3? ¿Y con menos de 198 cm^3?

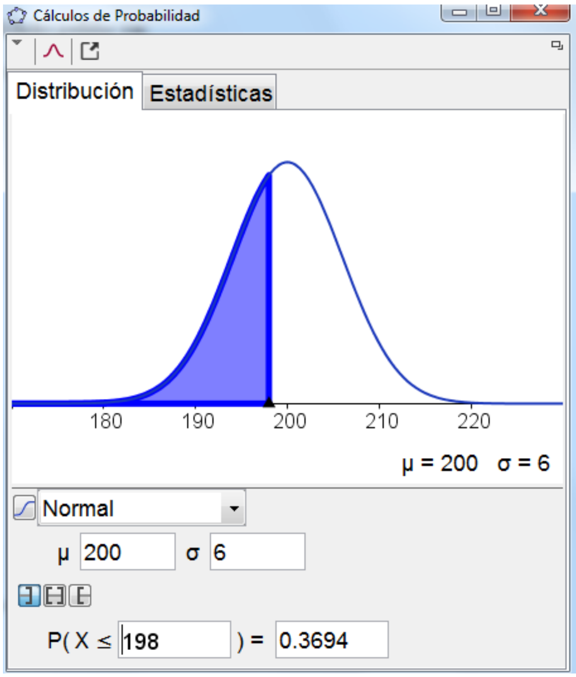
La máquina sigue una distribución normal de media μ = 200 cm^3 y desviación típica σ = 6 cm^3.

Las probabilidades pedidas son:

$P(X > 205) = P(Z > 0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7977 = 0{,}2023$



$P(X < 198) = P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - 0{,}6306 = 0{,}3694$



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 424

1. Demuestra que las siguientes funciones son funciones de densidad de ciertas variables aleatorias continuas:

i) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + 2 & si \quad 2 < x < 4 \\ 0 & para\ otros\ x \end{cases}$ **ii)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & si\ 1 < x < 4 \\ 0 & para\ otros\ x \end{cases}$

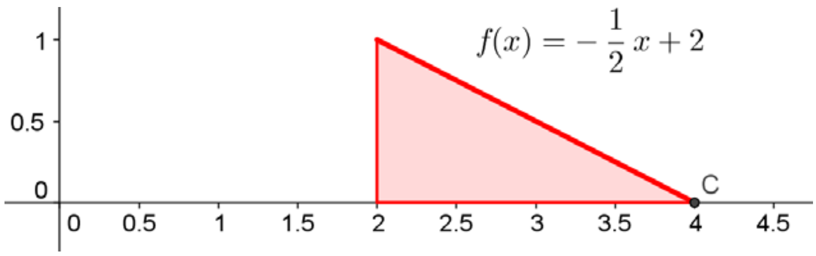
Para las funciones anteriores, calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(2{,}5 \le X \le 3{,}5)$ **b)** $P(X \le 3)$ **c)** $P(X \ge 2{,}4)$ **d)** $P(X = 3{,}65)$

I) La representación gráfica puede verse en el gráfico.

Es una función de densidad al cumplirse:

- $f_1(x) \ge 0 \ \ \forall\ x$
- Área recinto $= \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$



Las probabilidades pedidas son:

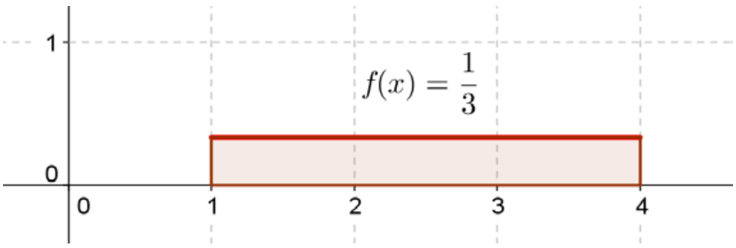
a) $P(2{,}5 \le X \le 3{,}5) = 0{,}5$ c) $P(X \ge 2{,}4) = 0{,}64$

b) $P(X \le 3) = 0{,}75$ d) $P(X = 3{,}65) = 0$

II) La representación gráfica puede verse en el gráfico.

Es una función de densidad al cumplirse:

- $f_1(x) \ge 0 \ \ \forall\ x$
- Área recinto $= 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$



Las probabilidades pedidas son:

a) $P(2{,}5 \le X \le 3{,}5) = 0{,}33$ c) $P(X \ge 2{,}4) = 0{,}53$

b) $P(X \le 3) = 0{,}67$ d) $P(X = 3{,}65) = 0$

2. Calcula el valor de m para que las funciones siguientes sean funciones de densidad:

a) $f_1(x) = \begin{cases} m & si\ 1 < x < 3 \\ 2m & si\ 3 < x < 5 \\ 0 & para\ otros\ x \end{cases}$ **b)** $f_1(x) = \begin{cases} mx + \dfrac{3}{2} & si\ 1 < x < 3 \\ 0 & para\ otros\ x \end{cases}$

Los valores del parámetro son: a) $m = \frac{1}{6}$ y b) $m = -\frac{1}{2}$

3. En una distribución normal N (0, 1), calcula:

a) P (Z ≤ 1,25) **b) P (Z ≥ 0,75)** **c) P (Z ≤ - 1, 56)** **d) P (- 0,32 ≤ Z ≤ 0,32)**

En la tabla de la distribución normal encontramos:

a) P (Z ≤ 1,25) = 0,8944

b) P (Z ≥ 0,75) = 1 – P (Z ≤ 0,75) = 0,2266

c) P (Z ≤ - 1,56) = P (Z ≥ 1,56) = 0,0594

d) P (- 0,32 ≤ Z ≤ 0,32) = 2 · P (0 ≤ Z ≤ 0,32) = 2 · [P (Z ≤ 0,32) – P (Z ≤ 0)] = 0,251

4. En una distribución normal N (0, 1), calcula el valor de a, con a ≥ 0, en cada una de las igualdades:

a) P (Z ≤ a) = 0,9934 **c) P (- a ≤ Z ≤ a) = 0,9642**

b) P (Z ≥ a) = 0,0869 **d) P (Z ≥ a) = 0,8997**

En la tabla de la distribución normal encontramos:

a) a = 2,48 b) a = 1,36 c) a = 2,10 d) a = - 1,28

5. En una distribución normal N (6, 2), calcula:

a) P (X ≤ 6,32) **b) P (X ≥ 5,2)** **c) P (X ≤ 4,5)** **d) P (5 ≤ X ≤ 7)**

Tipificamos la variable y posteriormente consultamos la tabla de la distribución normal:

a) P (X ≤ 6,32) = 0,5636 c) P (X ≤ 4,5) = 0,2266

b) P(X ≥ 5,2) = 0,6554 d) P (5 ≤ X ≤ 7) = 0,3829

6. En una distribución normal N (6, 2), calcula el valor de k, con k ≥ 0, en cada una de las igualdades:

a) P (X ≤ k) = 0, 7157 **c) P (0 ≤ X ≤ k) = 0,4975**

b) P (X ≥ k) = 0,3557 **d) P (6 - k ≤ X ≤ 6 + k) = 0,7606**

Tipificamos la variable y posteriormente consultamos la tabla de la distribución normal:

a) k = 7,14 c) P (0 ≤ X ≤ k) = P (X ≤ k) – 0,5; k = 11,61

b) k = 6,74 d) P (6 - k ≤ X ≤ 6 + k) = P (X ≤ 6 + k) – P (X ≤ 6 - k); k = 2,35

7. El tiempo medio de espera para ser operado en un hospital sigue una distribución normal de media 21 días y desviación típica 10. Halla la probabilidad de que el tiempo de espera para un paciente que necesita operación este comprendido entre 18 y 30 días.

La probabilidad es: $P(18 \leq X \leq 30) = 0{,}4339$

8. La duración en horas de un determinado modelo de lavadora sigue una distribución normal, de media 140 000 h. y una desviación típica de 8 000 h.

Halla:
a) La probabilidad de comprar una lavadora de ese modelo y dure más de 160 000 h.

b) ¿Qué porcentaje de esas lavadoras tendrán una duración comprendida entre 125 000 y 155 000 h?

a) La probabilidad pedida es: $P(X > 160\,000) = 0{,}0062$.

b) El porcentaje de lavadoras que tienen su duración entre 125 000 y 155 000 es:

$$P(125\,000 < X < 155\,000) = 0{,}9392 \text{ es decir el } 94\%.$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 425

9. En una determinada facultad las notas de corte siguen una distribución normal de media 10,5 puntos y varianza 0,7225.Hallar la probabilidad de que un alumno entre en esa facultad:

a) Si su nota es menor que 10 puntos.

b) Si su nota es mayor que 10,4 puntos.

La variable aleatoria sigue una normal $N(10{,}5\,;\,0{,}85)$

a) La probabilidad es: $P(X < 10) = 0{,}2782$

b) La probabilidad es: $P(X > 10{,}4) = 0{,}5468$

10. El coeficiente intelectual de los alumnos 800 de un centro de enseñanza es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media 110 y desviación típica 14. ¿Cuál es el número esperado de alumnos con un coeficiente intelectual entre 115 y 125?

El coeficiente intelectual es normal $N(110, 14)$.

Hallamos $P(115 < X < 125) = 0{,}2185$, es decir el 21,85 % de los alumnos tienen su coeficiente intelectual en ese intervalo. El valor esperado es 174,80 alumnos.

11. La duración, en años, de una determinada marca de tablet sigue una distribución normal de media 8 años y desviación típica 2 años. ¿Qué porcentaje de esas tablets dura más de 10 años?
La duración de las tablets sigue la normal $N(8, 2)$. Hallamos $P(X > 10) = 0{,}1587$, es decir, aproximadamente el 16%.

12. Una empresa conservera dispone de una máquina de enlatado. La cantidad de producto que mete en cada lata sigue una distribución normal de media μ = 250 g. y una desviación típica σ = 7,5 g. La lata se considera de mala calidad si la cantidad de producto que contiene es menor de 230 g. o mayor de 260 g. ¿Cuál es el porcentaje de enlatados de mala calidad de esta máquina?

La cantidad de producto sigue una normal N (250; 7,5).

Hallamos P(X < 230) + P(X > 260) = 0,095, es decir el 9,5 % de las latas se consideran de mala calidad.

13. El número de horas que duermen los vecinos de una urbanización que son:7,8 ; 6,5; 7; 8,5; 6,5; 7,5; 7,2; 8; 6,7; 7,4; 7; 6; 8,2; 6, se ajusta a una distribución normal.

a) Halla la media y la desviación típica.

b) Halla la probabilidad de que un vecino duerma entre 7,5 y 8,5 horas.

a) La media y la desviación típica de la distribución vale: $\mu = 7{,}164 \ y \ \sigma = 0{,}756$.

b) La probabilidad es: P(7,5 <X < 8,5) = 0,2898.

14. El tiempo necesario para que un metro llegue a la estación se distribuye según una normal de media 15 minutos y desviación típica 3 minutos.

a) Halla la probabilidad de que el tiempo este comprendido entre 12 y 20 minutos.

b) ¿Para qué valor del tiempo t, la probabilidad de que el metro llegue con más de t minutos de retraso es del 8%?

El tiempo de llegada sigue una normal N (15, 3).

a) La probabilidad es: P(12 < X < 20) = 0,7936

b) P(X > t) = 0,08 $\Rightarrow P(X < t) = 0{,}92 \Rightarrow t = 19{,}22$ minutos.

15. El peso, en kilos, de las hogazas de pan de una panadería sigue una distribución normal de media μ y varianza igual a 0,0225 kg ¿Cuánto vale μ si sabemos que solamente un 20% de las hogazas sobrepasa los 1,8 kg?

El peso sigue una normal N (μ; 0,15).

P(X > 1,8) = 0,2 $\Rightarrow P(X < 1{,}8) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(Z < \frac{1{,}8-\mu}{0{,}15}\right) = 0{,}80 \Rightarrow \frac{1{,}8-\mu}{0{,}15} = 0{,}8416 \Rightarrow \mu = 1{,}674$

16. La longitud media de las piezas de una fábrica es de 300 mm. Halla la desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una de estas piezas tenga una longitud mayor de 380 mm es 0,006.

La longitud sigue una normal N (300; σ).

P(X > 380) = 0,006 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(X<380)=0{,}994 \Rightarrow P\left(Z<\frac{380-300}{\sigma}\right)=0{,}994 \Rightarrow \frac{380-300}{\sigma}=2{,}5121 \Rightarrow \sigma=31{,}85$$

17. La velocidad de las motos que pasan por un punto de la autopista sigue una distribución normal con media μ y desviación típica σ. El 20% de las motos lleva una velocidad de al menos 100 km/h y el 8% a velocidad menor o igual que 60 km/h. Halla μ y σ.

La velocidad sigue una normal N (μ; σ).

$$\begin{cases} P(X \geq 100) = 0{,}20 \\ P(X \leq 60) = 0{,}08 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{100-\mu}{\sigma} = 0{,}8416 \\ \dfrac{60-\mu}{\sigma} = -1{,}4051 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 85{,}02 \\ \sigma = 17{,}80 \end{cases}$$

18. Se lanza una moneda equilibrada 500 veces. Halla la probabilidad de que se obtengan entre 230 y 260 caras.

Es una distribución binomial $B\left(500, \dfrac{1}{2}\right)$ y la aproximaremos a una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 500 \cdot \dfrac{1}{2} = 250 \ y \ \sigma = \sqrt{500 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = 11{,}18$.

La distribución normal es $N\,(250;\, 11{,}18)$

La probabilidad es:

$$P\,(230 < X < 260) = P\,(X' \leq 259{,}5) - P(X' \leq 229{,}5) = 0{,}778$$

19. Una compañía aérea ha comprobado que el 5% de los aviones de un determinado país llegan con retraso. En un mes en que han llegado 250 aviones de ese país, halla la probabilidad de que lleguen con retraso:

a) Al menos 200 aviones.

b) Como máximo 20 aviones.

Es una distribución binomial $B\,(250;\ 0{,}05)$ y la aproximaremos a una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 250 \cdot 0{,}05 = 12{,}5 \ y \ \sigma = \sqrt{250 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 3{,}45$.

La distribución normal es $N\,(12{,}5;\, 3{,}45)$

Las probabilidades son:

a) $P\,(X > 200) = P\,(X' \geq 200{,}5) = 0$

b) $P(X<20)=P(X'\leq 19{,}5)=0{,}9788$

20. En un supermercado la probabilidad de que un cliente pague su compra con una tarjeta sin fondos es 0,12. La última semana pagaron 400 compras con tarjeta. Halla la probabilidad de que:

a) Como máximo 80 de esas tarjetas carecieran de fondos.

b) Los pagos con tarjetas sin fondos estén comprendidos entre 40 y 60.

Es una distribución binomial $B(400;\ 0{,}12)$ y la aproximaremos a una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 400 \cdot 0{,}12 = 48 \quad y \quad \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88} = 6{,}5$.

La distribución normal es $N(48;\ 6{,}5)$

Las probabilidades son:

a) $P(X\leq 80)=P(X'\leq 80{,}5)\approx 1$

b) $P(40<X<60)=P(X'\leq 59{,}5)-P(X'\leq 39{,}5)=0{,}9045$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 426

1. La longitud media (en m.) de cierta variedad de plantas es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$\textbf{f(x)} = \begin{cases} kx^2(1-x^2) & si \quad x\in[0,1] \\ 0 \quad si \quad x\notin(0,1) \end{cases}$$

Halla el valor de k y la probabilidad de que una planta de esta especie mida menos de 0,4 m.

El área del recinto es $\int_0^1 kx^2\,(1-x^2)\,dx = 1\ uc$, haciendo la integral y resolviendo la igualdad obtenemos: k = 15/2.

La probabilidad pedida es: P(X < 0,4) = $\int_0^{0,4} \frac{15}{2}\cdot x^2\cdot(1-x^2)\,dx = 0{,}1446$.

2. Las calificaciones, en puntos, de un examen siguen una distribución normal de media 45 y desviación típica 2. ¿Qué nota debe exigirse para que solo apruebe el 10% de los que se examinan?

Las calificaciones siguen una normal N (45; 2). Llamamos a a la nota que vamos a hallar para que

$$P(X>a)=0{,}10 \Rightarrow P\left(Z>\frac{a-45}{2}\right)=0{,}10 \Rightarrow \frac{a-45}{2}=47{,}56 \Rightarrow a=140{,}12$$

La nota que debe exigirse es 140,12 puntos.

3. En una fábrica de productos cosméticos los sueldos de los trabajadores siguen una distribución normal de media 1 000 euros. Sabiendo que la probabilidad de ganar más de 1500 euros es de 0.1314, ¿cuánto vale la desviación típica?

Los sueldos de los trabajadores siguen una normal N (1000 ; σ).

Sabemos que P(X > 1500) = 0,1314

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{1500-1000}{\sigma}\right) = 0{,}1314 \Rightarrow \frac{1500-1000}{\sigma} = 1{,}1198 \Rightarrow \sigma = 446{,}51$$

4. Una de las teorías que describe la forma en que transcurre una reacción química es la *Teoría de las colisiones* que establece que para que una reacción química tenga lugar, los reactivos deben chocar mediante colisiones eficaces para romper los enlaces de estos y establecer los nuevos. Si en una reacción, con unas determinadas condiciones, se producen choques efectivos con una probabilidad del 48%, ¿cuál es la probabilidad de que en un millón de moléculas todos los choques sean efectivos?

Los choques efectivos siguen una distribución binomial $B\left(10^6;\ \ 0{,}48\right)$ y la aproximaremos a una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 10^6 \cdot 0{,}48 = 480\,000 \quad y \quad \sigma = \sqrt{10^6 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52} = 499{,}6$.

La distribución normal es $N\left(480000;\ 499{,}6\right)$

La probabilidad de que todos los choques sean efectivos es:

$$P(X = 10^6) = P\left(10^6 - 1 \le X' \le 10^6 + 1\right) = 0$$

5. Supongamos que el IMC (índice de masa corporal) de las niñas de 13 años de un país sigue una distribución normal de varianza 16. Sabiendo que el 6,68% de las niñas están en riesgo de sobrepeso al tener un IMC superior a 22,5, halla el valor del IMC medio para las niñas de 13 años de ese país.

El IMC sigue una normal N (μ; 4).

P(X > 22,5) = 0,0668

$$\Rightarrow P(X < 22{,}5) = 0{,}9332 \Rightarrow P\left(Z < \frac{22{,}5-\mu}{4}\right) = 0{,}9332 \Rightarrow \frac{22{,}5-\mu}{4} = 1{,}5 \Rightarrow \mu = 16{,}5$$

6. El tiempo de vida, en años, de cierta especie de perros sigue una distribución normal de media 12 años y desviación típica 2,5 años. Elegimos uno de estos perros al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que viva más de 13 años?

b) Sabiendo que vive más de 13 años, ¿cuál es la probabilidad de que viva menos de 13,5 años?

El tiempo de vida sigue una normal N (12; 2,5)

a) P(X > 13) = 0,3446 es la probabilidad de que uno de esos perros viva más de 13 años.

b) Es una probabilidad condicionada P(X = 13,5 / X > 13) = $\dfrac{P(13 < X < 13{,}5)}{P(X > 13)} = 0{,}2041$

7. Luis juega al golf y sabe que la probabilidad de meter una bola en el hoyo más difícil es 0,3. Lanza 50 bolas a ese hoyo, ¿cuál es la probabilidad de que meta en el hoyo entre 20 y 30 bolas?

Tenemos una distribución binomial $B\,(50;\;\;0{,}3)$ y la aproximaremos a una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 50 \cdot 0{,}3 = 15 \quad y \quad \sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 3{,}24$.

La distribución normal es $N\,(15;\,3{,}24)$

La probabilidad pedida es:

$$P\,(20 < X < 30) = P\,(\;X' \leq 29{,}5) - \;P\,(\;X' \leq 19{,}5) = 0{,}0824$$

8. El diámetro de las cabezas de unos tornillos sigue una distribución normal de media $\mu = 5.5$ mm y varianza $\sigma^2 = 0.64\;\;mm^2$. Si compramos una caja con 1200 de esos tronillos y sabemos que son aprovechables si su diámetro está entre 4.3 y 7.1 mm, ¿cuántos tornillos de la caja son aprovechables?

El diámetro sigue una normal N (5,5; 0,8).

Hallamos la probabilidad P (4,3 < X < 7,1) = 0, 9104. Es decir el 91 % de los tornillos tienen el diámetro de sus cabezas en el intervalo pedido. Por lo que son aprovechables 1092 tornillos.

9. El tiempo en minutos transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal A de un banco sigue una distribución normal de media $\mu = 9$ y desviación típica $\sigma = 1$, mientras que el tiempo transcurrido hasta que es atendido en la sucursal B sigue, también una distribución normal de media $\mu = 8{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 4$. Si un cliente tiene que hacer una gestión bancaria y sólo dispone de 10 minutos, ¿en qué sucursal A ó B será más fácil que le hayan atendido en el tiempo que dispone?

El tiempo en la sucursal A sigue una normal N (9, 1) y en la B una normal N(8,5; 2). Hallamos en cada caso P(X < 10):

- En la sucursal A: P(X < 10) = 0,8413

- En la sucursal B: P(X < 10) = 0,7734

Por tanto, es más fácil hacer la gestión en la sucursal B.

10. Una escuela de ingeniería hace una prueba para poder acceder a sus estudios. El 25 por ciento de los estudiantes que se examinaron obtuvieron una nota de al menos mayor de 6 y el 30 por ciento menor de 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, calcula la nota media y la desviación típica. Si se sabe que solo entraran en la escuela los que saquen más de 7 puntos y han hecho la prueba 385 alumnos ¿cuántos de ellos podrán acceder a estos estudios?

Las notas siguen una normal N (μ; σ).

$$\begin{cases} P(X \geq 6) = 0{,}25 \\ P(X \leq 4) = 0{,}30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6-\mu}{\sigma} = 0{,}6745 \\ \dfrac{4-\mu}{\sigma} = -0{,}5244 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 4{,}87 \\ \sigma = 1{,}67 \end{cases}$$

Hallamos la probabilidad de que saquen más de 7 puntos P(X > 7) = 0,1011. Por lo que, si han hecho la prueba 385 alumnos, entran en la escuela unos 40 alumnos.

11. Las notas de la asignatura de Matemáticas II de un grupo de 30 alumnos de 2º de bachillerato de un centro han sido:

Notas	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10]
Nº de alumnos	1	5	10	12	2

¿Podemos suponer que estas notas siguen una distribución normal?

La media y la desviación típica de estas notas es: $\mu = 5{,}6 \ y \ \sigma = 1{,}87$.

En $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma) = (3{,}73;\ 7{,}47)$ hay 21 alumnos, es decir, el 70%.

En $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma) = (1{,}86;\ 9{,}34)$ hay 28 alumnos, es decir, el 93,3%.

En $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma) = (0;\ 11{,}21)$ hay 30 alumnos, es decir, el 100%.

Podemos decir, con un pequeño error, que esta distribución de notas es normal.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 427

Matemáticas electorales

Cada vez que se celebran unas elecciones, locales o municipales (Ayuntamientos), autonómicas (Parlamentos de la Comunidad), generales (Congreso o Senado) o comunitarias (Parlamento Europeo), tras el recuento de votos hay que repartir los puestos de representación entre las diferentes candidaturas presentadas.

La Constitución Española establece que la representación debe ser proporcional al número de votos obtenido por cada candidatura, de modo que a mayor número de votos conseguidos, deberá corresponder mayor número de escaños. Llevar esto a la práctica no es tan sencillo como puede parecer a primera vista.

El sistema de reparto de representantes puede realizarse de múltiples formas. Existen los procedimientos:
- Reparto directamente proporcional.
- Métodos del divisor: regla D´Hondt, método de Saint Lagué puro o método de Saint Lagué modificado. - Métodos de cociente: cociente Hare, cociente Droop y cociente Imperiali.
- Método de la mayoría relativa.

Cada país ha optado por un sistema de reparto con una cierta intención política. Algunos sistemas electorales facilitan la gobernabilidad de la nación, ayuntamiento, etc. otorgando más poder del matemáticamente obtenido a las candidaturas más votadas. En otros casos se potencia la obtención de representación parlamentaria de las candidaturas con menos votos para potenciar la presencia política de las minorías.

Todo lo anterior forma parte del campo matemático denominado *Teoría de la elección social* que se ocupa, entre otros aspectos, de medir el poder en organizaciones políticas, económicas, educativas, etc. Se ocupa de los sistemas de votación, con o sin peso, la influencia de los miembros, las alianzas o coaliciones, los pactos, la cooperación, los índices de poder (índices de Shapley, Banzhaf o Deegan).

Estudia, analiza y describe cada uno de los sistemas de reparto de representantes que se nombran, el coste, en votos, que le cuesta a cada partido sus escaños, el beneficio o pérdida de escaños para cada candidatura según el sistema elegido.

Investiga sobre la medida del poder a través de los índices citados.

Ofrecemos bibliográfica donde encontrar información sobre las cuestiones expuestas, además en Internet puede localizarse, sin dificultad, trabajos realizados sobre los aspectos reseñados.

ESPINEL FEBLES, Mª. C. (1999) *El poder y las coaliciones*, Suma, nº 31, 109-117

ESPINEL FEBLES, Mª. C. (1999) *Sistema de reparto de poder en las elecciones locales*, Números nº 39, 13-19

GARFUNKEL, S. (1999) *Las matemáticas en la vida cotidiana.,* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

NORTES CHECA, A. (2001) *Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas*, Suma, nº 36, 43-49

PÉREZ CARRETERO, F. D. (2012) *Matemáticas y política. Las leyes electorales*, Suma, nº 71, 31-38

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1985) *Matemática Aplicada a la distribución de escaños. Método de reparto P. R. I.,* Epsilón nº 6/7

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1990) *Fórmulas electorales basadas en sucesiones de divisores.,* Suma nº 7, 29-38